数理水産科学　第10巻　2013年　pp.27-77

# Laplace変換のための解析学の基礎

上野公彦 †
† 東京海洋大学海洋科学部

# Foundation of Mathematical Analysis for Laplace Transform

**Kimihiko UENO†**
† Faculty of Marine Science, Tokyo University of Marine Science and Technology

## 1　本稿の目的

本稿は水産系学部の学生を対象としたLaplace(ラプラス)変換の収束性を理解する一助となることを目的とした解析学の基礎に関する解説である．水産系学部での学習においては，Laplace 変換が存在するという前提のもとで，微分方程式を解いたり，伝達関数を求めたりするのが一般的である．しかし，解析対象の特性に応じた新たなる積分変換を考案し，その理論を構築するためにはその背景となる解析学の基礎を理解せねばならない．Laplace 変換に関する良書は多い [18-27]．ただ，初心者向けに Laplace 変換の存在条件に関して解析学の基礎から日本語で詳述されたものは少ない [18].

そこで本稿では，Laplace 変換の収束性に関する次の四つの基本的な定理 (第 6 節で証明する) を理解するのに最低限必要な解析学の基礎に絞って解説した．そのため線形な微分方程式の解法のような応用面には触れていない。応用面に関しては文献 [18-27] 等を参考にして頂きたい．また，本稿の特殊な目的上，あえて採り上げなかった解析学の重要事項に関しては文献 [1-17] を参考にされたい.

【定義 1.1】Laplace 変換

実変数 $t$ に対して，実数値関数 $f(t)$ は $t \geqq 0$ で定義されていて，この区間の任意の有限な区間で積分可能とする．このとき，$s$ を複素数とし，広義積分（無限積分）

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \lim_{\beta\to\infty}\int_0^\beta e^{-st} f(t)dt \tag{1.1}$$

が収束するとき，

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \tag{1.2}$$

とおく．このとき $s$ の関数 $F(s)$ を $f(t)$ の Laplace 変換または Laplace 積分といい，$\mathcal{L}\{f(t)\}$ と表す.

【定理 1.1】

関数 $f(t)$ が $t \geqq 0$ で区分的に連続ならば $f(t)$ の Laplace 変換 (Laplace 積分)

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \tag{1.3}$$

は Re $s > 0$ なる[1]複素数 $s$ について存在する．

【定理 1.2】
関数 $f(t)$ は $t \geqq 0$ で区分的に連続であるとする．$f(t)$ の Laplace 変換 $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ が $s = s_0$ で収束すれば，Re $s >$ Re $s_0$ なる任意の $s$ に対して $F(s)$ が存在する．

【定理 1.3】
関数 $f(t)$ は $t \geqq 0$ で区分的に連続であるとする．このとき，$f(t)$ に対し

$$|f(t)| \leqq Me^{\alpha t} \quad (t \geqq 0) \tag{1.4}$$

が成り立つような正の数 $\alpha$ と $M$ が存在するならば，$f(t)$ の Laplace 変換

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \tag{1.5}$$

は Re $s > \alpha$ において収束する．

【定理 1.4】
関数 $f(t)$ は $t \geqq 0$ で区分的に連続であるとする．$f(t)$ の Laplace 変換 $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ $s = s_0$ において絶対収束 (5.9 節参照) するならば $F(s)$ は Re $s >$ Re $s_0$ なる $s$ に対して絶対収束する．

以上の定理の証明は本稿第 6 節において記す．本稿で触れなかった逆ラプラス変換に関する解説は近いうちに本誌に投稿する予定である．
さて，一般に，与えられた関数 $K(x, y)$ に対して，

$$g(y) = \int_a^b K(x, y) f(x) dx \tag{1.6}$$

によって関数 $f$ を $g$ に変換することを，$K(x, y)$ を核 (kernel) とする積分変換といい，$g$ から $f$ を求めることを逆変換という．(1.4) で $K(x, y) = e^{-xy}$ とした

$$g(y) = \int_0^\infty e^{-xy} f(x) dx$$

が本稿で扱う Laplace 変換である．

[1]Re $s$ は複素数 $s$ の実部を表す．例えば，Re $(3 + 2i) = 3$.

# 2　実数と連続性

## 2.1　切断

【定義 2.1】切断
次の二つの条件を満たすような $\mathbb{R}$(実数全体の集合，以下同様) の部分集合 $A, B$ の組 $(A, B)$ を実数の切断という.
( i )$A, B \neq \emptyset$
( ii ) 任意の $a \in A, b \in B$ に対して $a < b$ が成り立つ.

## 2.2　最大数 (最大値)・最小数 (最小値)

【定義 2.2】最大数 (最大値)・最小数 (最小値)
$A$ を $\mathbb{R}$ の部分集合とする．実数 $a$ が次の二つの条件を満たすとき，$a$ は $A$ の最大数 (最大値) であるといい，$\max A$ で表す.
( i )　$a \in A$
( ii )　任意の $x \in A$ に対して $x \leqq a$ が成り立つ.
実数 $a$ が次の二つの条件を満たすとき，$a$ は $A$ の最小数 (最小値) であるといい，$\min A$ で表す.
( i ′)　$a \in A$
( ii ′)　任意の $x \in A$ に対して $a \leqq x$ が成り立つ.

## 2.3　連続性の公理

【公理】連続性の公理
実数の任意の切断 $(A, B)$ に対し，次の二つのうちどちらか一方が必ず成り立つ.
( i )　$A$ に最大数 (最大値) が存在し, $B$ に最小数 (最小値) が存在しない.
( ii )　$A$ に最大数 (最大値) が存在しないで, $B$ に最小数 (最小値) が存在する.

## 2.4　上界・上限と下界・下限

【定義 2.3】上界・上限と下界・下限
$A$ を $\mathbb{R}$ の部分集合とするとき，実数 $b$ が任意の $a \in A$ に対して $a \leqq b$ を満たすならば，$b$ は $A$ の上界であるという．上界を持つような実数の部分集合は上に有界であるという．$A$ の上界全体の集合を $B$ としたとき，$B$ に最小数があればそれを $A$ の上限 (supremum) といい，$\sup A$ で表す.
実数 $c$ が任意の $a \in A$ に対して $c \leqq a$ を満たすならば，$c$ は $A$ の下界であるという．下界を持つような実数の部分集合は下に有界であるという．$A$ の下界全体の集合を $C$ としたとき，$C$ に最大数があればそれを $A$ の下限 (infimum) といい，$\inf A$ で表す.

【命題2．１】

空でなく上に有界な $\mathbb{R}$ の部分集合には上限が存在し，空でなく下に有界な $\mathbb{R}$ の部分集合には下限が存在する．

（証明）

$C$ を上に有界な空でない $\mathbb{R}$ の部分集合とする．このとき $B$ を $C$ の上界全体の集合とすると，$C$ は上に有界であるから $B$ も空でない．$B$ の補集合 $\mathbb{R} \setminus B$ を[2] $A$ とすると $(A, B)$ が実数の切断となることを示す．$B \neq \emptyset, A \cap B = \emptyset, A \cup B = \mathbb{R}$ は既に成り立っているので，$A \neq \emptyset$ であることを示す．$C$ は空でないので，$C$ の元 $c$ を一つとって，$z < c$ なる任意の元 $z$ を考える．定義より $z$ は $C$ の上界でないから，$z \in A$ となる．よって，$A \neq \emptyset$ となり，切断の条件 (ｉ)(定義 2.1 の (ｉ)) は全て満たされた．次に，切断の条件 (ⅱ)(定義 2.1 の (ⅱ)) が満たされること，即ち $a \in A, b \in B \Rightarrow a < b$ となることを背理法で示す．$a \in A, b \in B \Rightarrow a \geqq b$ と仮定すると，$b$ は $C$ の上界なので，それ以上の $a$ も $C$ の上界となり，$a \in A \cap B$ なる元 $a$ が存在してしまい，$A \cap B = \emptyset$ であることに矛盾する．よって $(A, B)$ が切断となることが示された．連続性の公理より,「$A$ に最大数が存在する」か「$B$ に最小数が存在する」かのどちらか一方だけが必ず成り立つ．定義 2.3 より，$B$ に最小数が存在すれば，その最小数が $C$ の上限となる．よって，$A$ に最大数が存在すると仮定し，背理法で示すことにする．$A$ に最大数 $x$ が存在すると仮定すると，$x \in A$ で $A \cap B = \emptyset$ だから，$x \notin B$ 即ち $x$ は $C$ の上界でない．故に，ある $c \in C$ で $x < c$ なる元 $c$ が存在する．更に，実数の稠密性より，$x < z < c$ なる $z$ が存在する．例えば $z$ として $\frac{x+c}{2}$ がある．このとき $z$ は $C$ に属するある $c$ よりも小さいから $C$ の上界でないので $B$ には属さず，$A$ に属する．これは $x$ が $A$ の最大数であることに矛盾する．以上より上に有界な場合は示された．

次に下に有界な場合を考える．$D$ を下に有界な空でない $\mathbb{R}$ の部分集合とする．このとき $A$ を $D$ の下界全体の集合とすると，$D$ は下に有界であるから $A$ も空でない．$A$ の補集合 $\mathbb{R} \setminus A$ を $B$ とすると $(A, B)$ が実数の切断となることを示す．$A \neq \emptyset, A \cap B = \emptyset, A \cup B = \mathbb{R}$ は既に成り立っているので，$B \neq \emptyset$ であることを示す．$D$ は空でないので，$D$ の元 $d$ を一つとって，$d < z$ なる任意の元 $z$ を考える．定義より $z$ は $D$ の下界でないから，$z \in B$ となる．よって，$B \neq \emptyset$ となり，切断の条件 (ｉ)(定義 2.1 の (ｉ)) は全て満たされた．次に，切断の条件 (ⅱ)(定義 2.1 の (ⅱ)) が満たされること，即ち $a \in A, b \in B \Rightarrow a < b$ となることを背理法で示す．$a \in A, b \in B \Rightarrow a \geqq b$ と仮定すると，$a$ は $D$ の下界なので，それ以下の $b$ も $D$ の下界となり，$b \in A \cap B$ なる元 $b$ が存在してしまい，$A \cap B = \emptyset$ であることに矛盾する．よって $(A, B)$ が切断となることが示された．連続性の公理より,「$A$ に最大数が存在する」か「$B$ に最小数が存在する」かのどちらか一方だけが必ず成り立つ．定義 2.3 より，$A$ に最大数が存在すれば，その最大数が $D$ の下限となる．よって，$B$ に最小数が存在すると仮定し，背理法で示すことにする．$B$ に最小数 $x$ が存在すると仮定すると，$x \in B$ で $A \cap B = \emptyset$ だから，$x \notin A$ 即ち $x$ は $D$ の下界でない．故に，ある $d \in D$ で $d < x$ なる元 $d$ が存在する．更に，実数の稠密性より，$d < z < x$ なる $z$ が存在する．例えば $z$ として $\frac{d+x}{2}$ がある．このとき $z$ は $D$ に属するある $d$ よりも大きいから $D$ の下界でないので $A$ には属さず，$B$ に属する．これは $x$ が $B$ の最小数であることに矛盾する．以上より下

[2] $x \in A$ であるが $x \notin B$ であるような $x$ 全体からなる集合を $A$ と $B$ の集合差または差といい,$A \setminus B$ と書く．例えば $\{1, 2, 3\} \setminus \{3,4,5\}=\{1,2\}$.

に有界な場合は示された. (証明終わり)

【定義 2.4】上限と下限の別表現

上限と下限は次のようにも定義できる.

$A$ を $\mathbb{R}$ の部分集合とする. 次の二つの条件を満たすとき $a$ は $A$ の上限であるという.

(ｉ) 任意の $x \in A$ に対して, $x \leqq a$ が成り立つ.

(ⅱ) 任意の正の数 $\varepsilon$ に対して, $x \in A$ かつ $a - \varepsilon < x$ を満たす $x$ が存在する.

同様に, 次の二つの条件を満たすとき $b$ は $A$ の下限であるという.

(ｉ') 任意の $x \in A$ に対して, $b \leqq x$ が成り立つ.

(ⅱ") 任意の正の数 $\varepsilon$ に対して, $x \in A$ かつ $x < b + \varepsilon$ を満たす $x$ が存在する.

【命題 2.2】

(1) $a$ が定義 2.3 で定めた $\mathbb{R}$ の部分集合 $A$ の上限であるための必要十分条件は定義 2.4 の条件 (ｉ),(ⅱ) である.

(2) $a$ が定義 2.3 で定めた $\mathbb{R}$ の部分集合 $A$ の下限であるための必要十分条件は定義 2.4 の条件 (ｉ'),(ⅱ") である.

(証明)

(1) の証明

**必要性**: 定義より $a$ は $A$ の上界全体の集合の最小数であるから $a$ は当然 $A$ の上界であるので (ｉ) は成り立つ. 次に (ⅱ) が成り立つことを背理法で示す. もし, (ⅱ) が成り立たないと仮定すると, ある正の数 $\varepsilon$ が存在して, $x \in A$ なる任意の $x$ に対して $a - \varepsilon \geqq x$ となる. これは $a$ が $A$ の上界全体の集合の最小数であることに矛盾する.

**十分性**: 上限は上界全体の集合の最小数であるから, $a$ が上限であるためには上界でなければならないので (ｉ) を満たさなければならない. 次に (ⅱ) が成り立つならば, $a$ が $A$ の上界全体の集合の最小数であること, 即ち $A$ の任意の上界 $c$ に対して $a \leqq c$ であることを背理法で示す. もし, $a \leqq c$ でないと仮定すると, $a > c$ となるので, $\varepsilon_1 = a - c > 0$ なる正の数 $\varepsilon_1$ が存在する. (ⅱ) より任意の正の数 $\varepsilon$ に対して, $x \in A$ かつ $a - \varepsilon < x$ を満たす $x$ が存在するので $\varepsilon = \varepsilon_1$ の場合を考えると

$$a - \varepsilon_1 < x$$

$$\therefore a - (a - c) < x$$

$$\therefore c < x$$

となる. これは $c$ が $A$ の上界であることに矛盾する.

(2) の証明

**必要性**: 定義より $b$ は $A$ の下界全体の集合の最大数であるから $b$ は当然 $A$ の下界であるので (ｉ') は成り立つ. 次に (ⅱ') が成り立つことを背理法で示す. もし, (ⅱ') が成り立たないと仮定すると, ある正の数 $\varepsilon$ が存在して, $x \in A$ なる任意の $x$ に対して $x \geqq b + \varepsilon$ となる. これは $b$ が $A$ の下界全体の集合の最大数であることに矛盾する.

**十分性**: 下限は下界全体の集合の最大数であるから, $b$ が下限であるためには下界でなければならないので (ｉ') を満たさなければならない. 次に (ⅱ') が成り立つならば, $b$ が $A$ の下界全体の集合の最大数であること, 即ち $A$ の任意の下界 $d$ に対して

$d \leqq b$ であることを背理法で示す．もし，$d \leqq b$ でないと仮定すると，$d > b$ となるので，$\varepsilon_2 = d - b > 0$ なる正の数 $\varepsilon_2$ が存在する．(ⅱ') より任意の正の数 $\varepsilon$ に対して，$x \in A$ かつ $x < \varepsilon + b$ を満たす $x$ が存在するので $\varepsilon = \varepsilon_2$ の場合を考えると

$$x < b + \varepsilon_2$$

$$\therefore x < b + (d - b) < x$$

$$\therefore x < d$$

となる．これは $d$ が $A$ の下界であることに矛盾する． (証明終わり)

### 2.5 Archimedes(アルキメデス) の原理

【命題 2.3】Archimedes(アルキメデス)の原理

$a > 0, b > 0$ を任意の二つの正の数とするとき，$na > b$ となるような自然数 $n$ が存在する．

(証明)

背理法で示す．全ての自然数 $n$ に対して $na \leqq b$ と仮定すると，集合 $A = \{na|n \in \mathbb{N}\}$($\mathbb{N}$ は自然数全体の集合) は，$b$ が上界として存在するから，上に有界である．よって，命題 2.1 より $A$ は上限 $\alpha$ を有する．ところが，$A$ の定義より，任意の自然数 $n$ に対して $(n+1) \in \mathbb{N}$ だから $(n+1)a \leqq \alpha$ となる．よって，任意の自然数 $n$ に対して $na \leqq \alpha - a$ となり $\alpha - a$ も $A$ の上界となる．これは $A$ の上限 $\alpha$ が上界の最小数であること (定義 2.3) に矛盾する．よって，示された． (証明終わり)

## 3 数列の極限

### 3.1 数列の極限と収束

【定義 3.1】数列の極限と収束

数列 $\{a_n\}$ において，任意の正の数 $\varepsilon$ に対して，ある自然数 $N$ が定まり，$n > N$ となるすべての $n$ に対して，

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon \tag{3.1}$$

となるならば，これを

$$n \to \infty \text{ のとき } a_n \to \alpha \quad \text{または} \quad \lim_{n \to \infty} a_n = \alpha \tag{3.2}$$

という記号で表し，このとき数列 $\{a_n\}$ は収束するという．また $\alpha$ を数列 $\{a_n\}$ の極限値という．数列 $\{a_n\}$ がいかなる $\alpha$ にも収束しないとき，数列 $\{a_n\}$ は発散するという．

【定義 3.2】数列の正負無限大への発散

数列 $\{a_n\}$ において，任意の実数 $G$ に対して，ある自然数 $N$ が定まり，$n > N$ となるすべての $n$ に対して，

$$a_n > G \tag{3.3}$$

となるならば，これを

$$n \to \infty \text{ のとき } a_n \to \infty \quad \text{または} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \infty \tag{3.4}$$

という記号で表し，このとき数列 $\{a_n\}$ は無限大に発散するという．同様に，任意の実数 $L$ に対して，ある自然数 $N$ が定まり，$n > N$ となるすべての $n$ に対して，

$$a_n < L \tag{3.5}$$

となるならば，これを

$$n \to \infty \text{ のとき } a_n \to -\infty \quad \text{または} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \tag{3.6}$$

という記号で表し，このとき数列 $\{a_n\}$ は負の無限大に発散するという．

【例 3.1】

$|r| < 1$ のとき $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$ であることを定義によって示す．任意の正の数 $\varepsilon$ に対して，$n > N$ のとき $|r^n| < \varepsilon$ となるように自然数 $N$ を定めればよい．よって $|r^n| < \varepsilon$ の両辺の自然対数をとると

$$\log_e |r^n| = \log_e |r|^n = n \log_e |r| < \log_e \varepsilon$$

となる．$|r| < 1$ より $\log_e |r| < 0$ であるから

$$n > \frac{\log_e \varepsilon}{\log_e |r|}$$

となるから，$N = \left[\frac{\log_e \varepsilon}{\log_e |r|}\right] + 1$ と定めればよい．よって，任意の正の数 $\varepsilon$ に対して，$N = \left[\frac{\log_e \varepsilon}{\log_e |r|}\right] + 1$ と定めると，$n > N$ なる全ての $n$ に対して

$$n > N > \frac{\log_e \varepsilon}{\log_e |r|}$$

$|r| < 1$ より $\log_e |r| < 0$ だから

$$n \log_e |r| = \log_e |r|^n = \log_e |r^n| < \log_e \varepsilon$$

$$\therefore \quad |r^n - 0| < \varepsilon$$

となり示された．

【例 3.2】

$r > 1$ のとき $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = \infty$ であることを定義によって示す．任意の実数 $G$ に対して，$n > N$ のとき $r^n > G$ となるように自然数 $N$ を定めればよい．よって $|r^n| > G$ の両辺の自然対数をとると

$$\log_e |r^n| = \log_e r^n = n \log_e r > \log_e G$$

となる．$r > 1$ より $\log_e r > 0$ だから，$n > \frac{\log_e G}{\log_e r}$ となるので $N = \left[\frac{\log_e G}{\log_e r}\right] + 1$ と定めればよい．よって，任意の実数 $G$ に対して自然数 $N$ を $N = \left[\frac{\log_e G}{\log_e r}\right] + 1$ と定めると $n > N$ なる全ての $n$ に対して

$$n > N > \frac{\log_e G}{\log_e r}$$

$r > 1$ より $\log_e r > 0$ だから

$$n \log_e r = \log_e r^n > \log_e G$$

$$\therefore \quad r^n > G$$

となり示された．

【命題 3.1】

数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が収束し，任意の自然数 $n$ に対して，$a_n \leqq b_n$ ならば $\lim_{n\to\infty} a_n \leqq \lim_{n\to\infty} b_n$ である．

(証明)

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha, \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ とおいて，$\alpha > \beta$ を仮定し，背理法で示す．数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ は収束するから任意の正の数 $\varepsilon$ に対して，ある自然数 $N_1, N_2$ が存在して

$$n > N_1 \text{となる全ての } n \text{ に対して } |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

$$n > N_2 \text{となる全ての } n \text{ に対して } |b_n - \beta| < \varepsilon$$

が成り立つ．$\varepsilon$ は任意の正の数であり，$\alpha > \beta$ を仮定しているので，$\varepsilon = \frac{\alpha-\beta}{2}$ とおける．この $\varepsilon$ に対して，自然数 $N$ を $N = \max\{N_1, N_2\}$ と定めると，$n > N$ なる全ての $n$ に対して

$$-\varepsilon = -\frac{\alpha-\beta}{2} < a_n - \alpha, \quad b_n - \beta < \frac{\alpha-\beta}{2} = \varepsilon$$
$$\therefore a_n > \frac{\alpha+\beta}{2}, \quad b_n < \frac{\alpha+\beta}{2}$$

となる．これは $a_n \leqq b_n$ であることに矛盾するので示された．

(証明終わり)

## 3.2 はさみうちの原理

【命題 3.2】はさみうちの原理

三つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ について，任意の自然数 $n$ に対して $a_n \leqq b_n \leqq c_n$ を満たし，かつ $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha, \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$ ならば $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ である．

(証明)

仮定より，任意の正の数 $\varepsilon$ に対して，ある自然数 $N_1, N_2$ が定まり，

$$n > N_1 \text{となる全ての } n \text{ に対して } |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

$$n > N_2 \text{となる全ての} n \text{に対して} |c_n - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つ.

$$n > N_1 \text{のとき絶対値記号をはずすと} \alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon$$

$$n > N_2 \text{のとき絶対値記号をはずすと} \alpha - \varepsilon < c_n < \alpha + \varepsilon$$

よって，任意の正の数 $\varepsilon$ に対して，自然数 $N$ を $N = \max\{N_1, N_2\}$ と定めると，$n > N$ となる全ての $n$ に対して

$$\alpha - \varepsilon < a_n \leqq b_n \leqq c_n < \alpha + \varepsilon$$

$$\therefore \quad |b_n - \alpha| < \varepsilon$$

となるから定義 3.1 より $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ であることが示された.

(証明終わり)

## 3.3 有界

【定義 3.3】有界
( i )　ある $M \geqq 0$ が存在して，全ての $n$ に対して $|a_n| \leqq M$ が成り立つとき，数列 $\{a_n\}$ は有界であるという.
( ii )　実数 $K$ が存在して，全てての $n$ に対して $a_n \leqq K$ が成り立つとき，数列 $\{a_n\}$ は上に有界であるという．また，実数 $L$ が存在して，全ての $n$ に対して $a_n \geqq L$ が成り立つとき，数列 $\{a_n\}$ は下に有界であるという．数列 $\{a_n\}$ が有界であることは，上に有界かつ下に有界であることと同値である.

【命題 3.3.1】
　$A$ を空でない上に有界な $\mathbb{R}$ の部分集合とするとき

$$a_n \in A \quad , \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \sup A$$

を満たす数列 $\{a_n\}$ が存在する.

(証明)
$A$ は上に有界だから命題 2.1 より上限 $\sup A$ が存在する．$\alpha = \sup A$ とおくと，定義 2.4 の ( ii ) より各自然数 $n$ に対して $\alpha - \frac{1}{n} < a_n \leqq \alpha$ を満たす $a_n \in A$ が存在する. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \alpha - \frac{1}{n} = \alpha$ だから，はさみうちの原理 (命題 3.2) より $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha = \sup A$ となる数列 $\{a_n\}$ が存在する.

(証明終わり)

【命題 3.3.2】
　$A$ を空でない下に有界な $\mathbf{R}$ の部分集合とするとき

$$a_n \in A \quad , \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \inf A$$

を満たす数列 $\{a_n\}$ が存在する．

**(証明)**

$A$ は下に有界だから命題 2.1 より下限 $\inf A$ が存在する．$\beta = \inf A$ とおくと，定義 2.4 の (ⅱ) より各自然数 $n$ に対して $\beta \leqq a_n < \beta + \frac{1}{n}$ を満たす $a_n \in A$ が存在する．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \beta + \frac{1}{n} = \beta$ だから，はさみうちの原理 (命題 3.2) より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \beta = \inf A$ となる数列 $\{a_n\}$ が存在する．

**(証明終わり)**

【定理 3.1】

収束する数列は有界である．

**(証明)**

数列 $\{a_n\}$ の極限値を $\alpha$ とする．定義 3.1 の (3.1) 式において $\varepsilon$ は任意だから，$\varepsilon = 1$ とすると，$n > N$ のとき常に $|a_n - \alpha| < 1$ となるような $N$ がとれる．ここで，$M = \max\{|a_1|, \cdots, |a_N|, |\alpha| + 1\}$ とおくと，$n = 1, \cdots, N$ に対しては，この $M$ の定義から明らかに $|a_n| \leqq M$ が成り立つ．

次に，$n > N$ のときは $|a_n| = |a_n - \alpha + \alpha| \leqq |a_n - \alpha| + |\alpha| < 1 + |\alpha| \leqq M$
となる．以上より，収束する数列は有界である．

**(証明終わり)**

## 3.4 単調増加・単調減少

【定義 3.4】単調増加・単調減少

数列 $\{a_n\}$ が条件「$n < n'$ ならば $a_n \leqq a_{n'}$」を満たすとき，$\{a_n\}$ は単調増加であるという．同様に，条件「$n < n'$ ならば $a_n \geqq a_{n'}$」を満たすとき，$\{a_n\}$ は単調減少であるという．条件「$n < n'$ ならば $a_n < a_{n'}$」を満たすとき，$\{a_n\}$ は狭義単調増加であるという．条件「$n < n'$ ならば $a_n > a_{n'}$」を満たすとき，$\{a_n\}$ は狭義単調減少であるという．

【定理 3.2】

数列 $\{a_n\}$ が単調増加かつ上に有界ならば，即ち $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n \leqq \cdots \leqq K \in \mathbb{R}$ ならば数列 $\{a_n\}$ は収束する．同様に，数列 $\{a_n\}$ が単調減少かつ下に有界ならば，即ち $a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n \geqq \cdots \geqq L \in \mathbb{R}$ ならば数列 $\{a_n\}$ は収束する．

**(証明)**

数列 $\{a_n\}$ に現れる数の集合を $A$ とする．

(ⅰ) 数列 $\{a_n\}$ が単調増加かつ上に有界の場合．

数列 $\{a_n\}$ は上に有界だから，命題 2.1 より $A$ は上限を有する．その上限を $\alpha$ とする．定義 2.4 の (ⅰ) で定めた上限の定義より，任意の自然数 $n$ に対して $a_n \leqq \alpha$ である．次に，$\varepsilon > 0$ を任意にとると，定義 2.4 の (ⅱ) で定めた上限の定義より，

$$\alpha - \varepsilon < a_N \leqq \alpha \Longleftrightarrow -\varepsilon < a_N - \alpha \leqq 0$$

を満たす，$a_N$ が存在する．数列 $\{a_n\}$ は単調増加だから $n > N$ となる全ての $n$ に対して

$$-\varepsilon < a_N - \alpha \leqq a_n - \alpha \leqq 0$$

$$\therefore \quad |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

となるから (定義 3.1) より示された.

(ⅱ) 数列 $\{a_n\}$ が単調減少かつ下に有界な場合．数列 $\{a_n\}$ は下に有界だから，命題 2.1 より $A$ は下限を有する．その下限を $\beta$ とする．定義 2.4 の (ⅰ)' で定めた下限の定義より，任意の自然数 $n$ に対して $\beta \leqq a_n$ である．次に，$\varepsilon > 0$ を任意にとると，定義 2.4 の (ⅱ)' で定めた下限の定義より，

$$\beta \leqq a_N < \beta + \varepsilon \Longleftrightarrow 0 \leqq a_N - \beta < \varepsilon$$

を満たす，$a_N$ が存在する．数列 $\{a_n\}$ は単調減少だから $n > N$ となる全ての $n$ に対して

$$0 \leqq a_n - \beta \leqq a_N - \beta < \varepsilon$$

$$\therefore \quad |a_n - \beta| < \varepsilon$$

となるから (定義 3.1) より示された.

(証明終わり)

## 3.5 部分列

【定義 3.5】部分列

数列 $\{a_n\}$ の一部の項をもとの順番を保ったまま並べてできる数列を $\{a_n\}$ の部分列という．($\{a_n\}$ 自身も $\{a_n\}$ の部分列である)．即ち，もとの数列から順番を破壊することなく一部分を抜き取ってできた数列のことである.

【例 3.3】部分列

自然数全体を大きさの順に並べて作った数列を $\{a_n\} = \{1, 2, \cdots\}$ とする．$\{a_n\}$ から奇数番目の項だけ取り出して，大きさの順に並べて作った数列 $\{b_k\} = \{1, 3, \cdots, 2k-1, \cdots\}$ は $\{a_n\}$ の部分列である.

【記号】部分列を表す記号

$\{a_p, a_q, a_r, \cdots\}$ が数列 $\{a_n\}$ の部分列であるとすると，$p, q, r$ は自然数で $p < q < r < \cdots$ を満たしている．いま，$p = n(1), q = n(2), r = n(3), \cdots$ とおくと $n(k)$ は自然数で

$$k < k' \Rightarrow n(k) < n(k') \tag{3.7}$$

を満たす．(3.7) を満たす自然数列 $\{n(k)\}$ を狭義単調増加な自然数列という．狭義単調増加な自然数列 $\{n(k)\}$ は $n(k) \geqq k$ を満たす．そして，部分列 $\{a_p, a_q, a_r, \cdots\}$ は

$$\{a_{n(1)}, a_{n(2)}, a_{n(3)}, \cdots\} = \{a_{n(k)}\}_{k \in \mathbf{N}} \tag{3.8}$$

と書ける.

【定理 3.3】

数列 $\{a_n\}$ が収束列でその極限値が $\alpha$ であれば，$\{a_n\}$ の任意の部分列は同じ $\alpha$ に収束する．

**(証明)**

仮定より，任意の正の数 $\varepsilon$ に対して，ある自然数 $N$ が存在して，$k > N$ なる $k$ に対して，$|a_k - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つ．$n(k) \geqq k$ だから $k > N$ のとき $n(k) > N$ である．従って，任意の正の数 $\varepsilon$ に対して，ある自然数 $N$ が存在して，$n(k) > N$ のとき常に $|a_{n(k)} - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つ．故に，$\{a_n\}$ の任意の部分列 $\{a_{n(k)}\}$ は $\alpha$ に収束する．

**(証明終わり)**

## 3.6 Bolzano-Weierstrass(ボルツァーノ-ワイエルシュトラス) の定理

【定理 3.4】Bolzano(ボルツァーノ)-Weierstrass(ワイエルシュトラス)の定理

有界な数列 $\{a_n\}$ は収束する部分列を有する．

**(証明)**

数列 $\{a_n\}$ は有界であるから，適当な正の数 $M$ をとり，$a_n \in [-M, M]$ としてよい．この区間を $I_1$ とする．次に，$I_1$ を真ん中で二等分する．数列は無限個の項より構成されているから，二等分した区間のうち少なくとも一方には無限個の項が含まれる．そこで，無限個の項を含んでいる方の区間を選んで，それを $I_2$ とする．以下同様な操作を繰り返すと，有界な閉区間の無限個の列 $\{I_k\}$ が構成される．

次にもとの数列 $\{a_n\}$ の部分列を次のように選ぶ．最初に $a_{n(1)} \in I_1$ は適当に選ぶ．次に $I_2$ は無限個の項を含んでいるから，$a_{n(2)} \in I_2$ であって $n(1) < n(2)$ となるものが必ず存在する．何故なら，$n(1)$ 以下の自然数は有限個しかない．この操作を繰り返すことにより，部分列 $\{a_{n(k)}\}$ で $a_{n(k)} \in I_k$ となるものが構成される．この部分列が収束することを示せばよい．

そこで，二つの数列 $\{b_k\}, \{c_k\}$ をそれぞれ区間 $I_k$ の左端と右端の値として定義する．$a_{n(k)} \in I_k$ より $b_k \leqq a_{n(k)} \leqq c_k$ となる．またこの区間列 $\{I_k\}$ の定義の仕方より，次のようになる．

$\{b_k\}$ は単調増加で, $b_k \leqq M$　即ち上に有界

$\{c_k\}$ は単調減少で, $-M \leqq c_k$　即ち下に有界

$$c_k - b_k = \frac{2M}{2^{k-1}}$$

従って，定理 3.2 より数列 $\{b_k\}, \{c_k\}$ は収束する．そこで，$\lim_{k\to\infty} b_k = \beta, \lim_{k\to\infty} c_k = \gamma$ とすると

$$|\gamma - \beta| = |(\gamma - c_k) + (c_k - b_k) + (b_k - \beta)| \leqq |\gamma - c_k| + \frac{2M}{2^{k-1}} + |b_k - \beta| \to 0 \quad (k \to \infty)$$

となるので $\beta = \gamma$ である．よって，$b_k \leqq a_{n(k)} \leqq c_n$ であって，両端の数列が収束し，極限値が等しいから，はさみうちの原理 (命題 3.2) より部分列 $\{a_{n(k)}\}$ も収束するので示された．

**(証明終わり)**

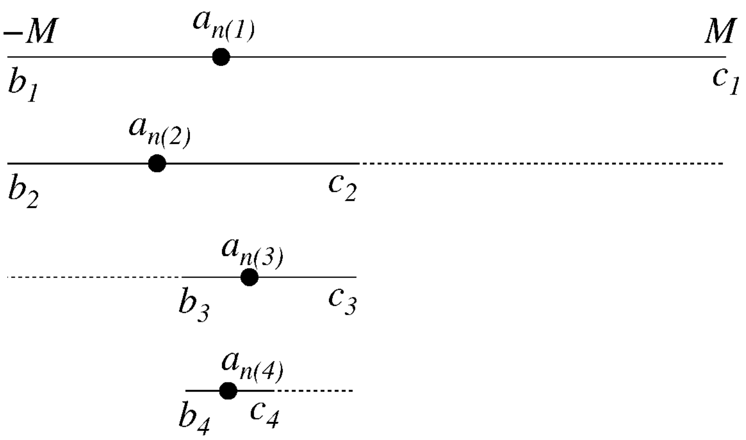


**Fig.3.1** Bolzano-Weierstrass の定理の説明図

## 3.7 Cauchy(コーシー) 列

【定義 3.7】Cauchy(コーシー)列

数列 $\{a_n\}$ が Cauchy 列であるとは，数列 $\{a_n\}$ が次の条件を満たすことをいう．
（条件）任意の正の数 $\varepsilon$ に対して，ある自然数 $N$ が存在して，

$$m, n > N \text{ のとき常に } |a_n - a_m| < \varepsilon \tag{3.9}$$

が成り立つ．

【補題 3.1】

数列 $\{a_n\}$ が Cauchy 列ならば数列 $\{a_n\}$ は有界である．

**(証明)**

定義 3.7 の条件において $\varepsilon = 1$ とすると，$m, n > N$ のとき常に $|a_n - a_m| < 1$ となるような自然数 $N$ が存在する．ここで，$M = \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_N|, |a_{N+1}| + 1\}$ とおくと，$n = 1, 2, \cdots, N$ に対しては $M$ の決め方から明らかに $a_n \leqq M$ が成り立つ．$n > N$ の場合に対しては

$$|a_n| = |a_n - a_{N+1} + a_{N+1}| \leqq |a_n - a_{N+1}| + |a_{N+1}| < 1 + |a_{N+1}| \leqq M$$

となる．以上より有界であることが示された． **(証明終わり)**

【補題 3.2】

Cauchy 列 $\{a_n\}$ の部分列が収束すれば，$\{a_n\}$ 自身が収束する．

**(証明)**

部分列 $\{a_{n(k)}\}$ が $\alpha$ に収束するとすると，任意の正の数 $\varepsilon$ に対して，$n(k) \geqq k > K$ ならば $|a_{n(k)} - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つような自然数 $K$ が存在する．また $\{a_n\}$ は Cauchy 列だから，定義 3.7 の条件を満たすような自然数 $N$ が存在する．$K_0 = \max\{K, N\} + 1$ とすると $n(K_0) \geqq K_0 > K$ かつ $n(K_0) \geqq K_0 > N$ だから，$n > K_0$ のとき

$$|a_n - \alpha| = |a_n - a_{n(K_0)} + a_{n(K_0)} - \alpha| \leqq |a_n - a_{n(K_0)}| + |a_{n(K_0)} - \alpha| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

となる．$\varepsilon$ は任意の正の数だから $\{a_n\}$ は $\alpha$ に収束する．

**(証明終わり)**

【定理 3.5】
　数列 $\{a_n\}$ が収束列であるための必要十分条件は $\{a_n\}$ が Cauchy 列であることである．

**(証明)**

**必要性**：数列 $\{a_n\}$ が極限値 $\alpha$ を有する収束列ならば，任意の正の数 $\varepsilon$ に対して，ある自然数 $N$ が定まり，$n > N$ なる全ての $n$ に対して $|a_n - \alpha| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ が成り立つ．よって $m, n > N$ のとき

$$|a_n - a_m| = |a_n - \alpha + \alpha - a_m| \leqq |a_n - \alpha| + |\alpha - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

となり，$\{a_n\}$ は Cauchy 列である．

**十分性**：$\{a_n\}$ が Cauchy 列であるならば補題 3.1 より $\{a_n\}$ は有界である．従って，Bolzano-Weierstrass の定理 (定理 3.4) より $\{a_n\}$ は収束する部分列を有する．よって，補題 3.2 より $\{a_n\}$ は収束列である．

**(証明終わり)**

# 4　一変数関数と連続性

## 4.1　一変数関数

【定義 4.1】一変数関数
　$\mathbb{R}$ の部分集合 $I$ に属する全ての $x$ に対して実数 $f(x)$ が定められているとき，$f$ を $I$ で定義された一変数 (実数値) 関数という．$f(x)$ を $x \in I$ における $f$ の値という．$I$ を関数 $f$ の定義域という．また，$x$ が $I$ をくまなくとるとき，$f(x)$ のとる値の集合を値域という．

## 4.2　有界

【定義 4.2】有界
　関数 $f(x)$ が $\mathbb{R}$ の部分集合 $I$ で定義されているものとする．$I$ 上で $f(x)$ のとる値の集合が有界のとき，即ち，ある数 $M \geqq 0$ が存在し，全ての $x \in I$ に対して $|f(x)| \leqq M$ が成り立つとき，$f(x)$ は $I$ 上で有界であるという．$I$ 上で $f(x)$ のとる値の集合が上に有界のとき，即ち，ある実数 $K$ が存在し，全ての $x \in I$ に対して $f(x) \leqq K$ が成り立つとき，$f(x)$ は $I$ 上で上に有界であるという．また，$I$ 上で $f(x)$ のとる値の集合が下に有界のとき，即ち，ある実数 $L$ が存在し，全ての $x \in I$ に対して $f(x) \geqq L$ が成り立つとき，$f(x)$ は $I$ 上で下に有界であるという．$f(x)$ が上に有界かつ下に有界であるということは有界であるということである．

## 4.3　単調関数

【定義 4.3】単調関数

$\mathbb{R}$ の部分集合 $I$ で定義された関数 $f(x)$ が条件「$x, x' \in I$ かつ $x < x'$ ならば $f(x) \leqq f(x')$」を満たすとき，$f(x)$ は $I$ で単調増加であるという．条件「$x, x' \in I$ かつ $x < x'$ ならば $f(x) \geqq f(x')$」を満たすとき，$f(x)$ は $I$ で単調減少であるという．条件「$x, x' \in I$ かつ $x < x'$ ならば $f(x) < f(x')$」を満たすとき，$f(x)$ は $I$ で狭義単調増加であるという．条件「$x, x' \in I$ かつ $x < x'$ ならば $f(x) > f(x')$」を満たすとき，$f(x)$ は $I$ で狭義単調減少であるという．

## 4.4　関数の極限

【定義 4.4.1】関数の極限 1

$0 < |x-a| < \delta_0$ で定義されている関数 $f(x)$ が $x \to a$ のとき，ある数 $\alpha$ に収束するとは，任意の正の数 $\varepsilon$ に対して，ある正の数 $\delta(\delta < \delta_0)$ が存在し，

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon \tag{4.1}$$

が成り立つことをいい，

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha \quad \text{または} \quad f(x) \to \alpha (x \to a) \tag{4.2}$$

と表す．$\alpha$ を $x \to a$ のときの $f(x)$ の極限または極限値という．

【例 4.1.1】関数の極限 1

定義により $\displaystyle\lim_{x \to 1}(2x+1) = 3$ を示す.

(証明)

任意の正の数 $\varepsilon$ に対して，ある正の数 $\delta$ が存在し，

$$|x-1| < \delta \Rightarrow |2x+1-3| < \varepsilon$$

となることを示せばよい.

$$|2x+1-3| = |2x-2| = 2|x-1| < \varepsilon$$

が成り立つとすると，$|x-1| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ となるから $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ と定めればよい.

よって，任意の正の数 $\varepsilon$ に対して，$\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ と定めると

$$|x-1| < \delta = \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |2x-2| = |2x+1-3| < \varepsilon$$

となるから示された.　(証明終わり)

【定義 4.4.2】関数の極限 2

$x \geqq R_0$ で定義されている関数 $f(x)$ が $x \to \infty$ のとき，ある数 $\alpha$ に収束するとは，任意の正の数 $\varepsilon$ に対して，ある正の数 $R(R > R_0)$ が存在し，

$$x > R \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon \tag{4.3}$$

が成り立つことをいい，

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\alpha \quad \text{または} \quad f(x)\to\alpha(x\to\infty) \tag{4.4}$$

と表す．$\alpha$ を $x\to\infty$ のときの $f(x)$ の極限または極限値という．

【例 4.1.2】関数の極限 2

定義により $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ を示す．

**(証明)**

任意の正の数 $\varepsilon$ に対して，ある正の数 $R$ が存在し，

$$x>R\Rightarrow\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon$$

となることを示せばよい．

$$\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon$$

が成り立つとすると

$$|x|>\frac{1}{\varepsilon}$$

となる．$x>0$ と考えてよいから $x>\dfrac{1}{\varepsilon}$ となる．従って $R=\dfrac{1}{\varepsilon}$ と定めればよい．よって任意の正の数 $\varepsilon$ に対して，ある正の数 $R$ を $R=\dfrac{1}{\varepsilon}$ と定めると

$$x>R=\frac{1}{\varepsilon}\Rightarrow\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon$$

となるから示された．　**(証明終わり)**

【定義 4.5】片側からの極限

関数の極限において，$x$ の範囲を $a$ の右側 ($a$ より大きい側) または左側 ($a$ より小さい側) だけに制限して考えることがある．即ち，右側の場合は $f(x)$ は $a<x<a+\delta_0$ で定義されていればよいとし，(4.1) を

$$0<x-a<\delta_0\Rightarrow|f(x)-\alpha|<\varepsilon \tag{4.5}$$

と変更する．このとき $\alpha$ を $x$ が右から $a$ に近づくときの極限 (右極限) といい，$\alpha=f(a+0)=\displaystyle\lim_{x\to a+0}f(x)$ などと表す．左側の場合は $f(x)$ は $a-\delta_0<x<a$ で定義されていればよいとし，(4.1) を

$$0<a-x<\delta_0\Rightarrow|f(x)-\beta|<\varepsilon \tag{4.6}$$

と変更する．このとき $\beta$ を $x$ が左から $a$ に近づくときの極限 (左極限) といい，$\beta=f(a-0)=\displaystyle\lim_{x\to a-0}f(x)$ などと表す．

## 4.5 Cauchyの収束条件

【定理4.1】Cauchyの収束条件

次の(ⅰ)と(ⅱ)は同値である．

(ⅰ)$x \to \infty$のとき$f(x)$は収束する．

(ⅱ)任意の正の数$\varepsilon$に対して，ある正の数$R$が存在し，$x > R,\ x' > R$を満たす$x,\ x'$に対して$|f(x) - f(x')| < \varepsilon$が成り立つ．

**(証明)**

(ⅰ)⇒(ⅱ)の証明

$x \to \infty$のとき，$f(x)$は収束するから，その極限を$\alpha$とすると，任意の正の数$\varepsilon$に対して，ある正の数$R$が存在し，$x > R$を満たす任意$x$について，$|f(x) - \alpha| < \dfrac{\varepsilon}{2}$が成り立つ．従って，$x > R,\ x' > R$のとき

$$|f(x) - \alpha| + |f(x') - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \tag{4.7}$$

が成り立つから

$$|f(x) - f(x')| = |\{f(x) - \alpha\} + \{\alpha - f(x')\}| \leqq |f(x) - \alpha| + |f(x') - \alpha| < \varepsilon \tag{4.8}$$

が成り立つ．故に，$x > R,\ x' > R$を満たすとき$|f(x) - f(x')| < \varepsilon$となるから示された．

(ⅱ)⇒(ⅰ)の証明

$\{x_n\}$を単調増加で$x_n \to \infty (n \to \infty)$となる任意の数列とする．任意の正の数$\varepsilon$に対して(ⅱ)のように$R$をとると，$m > N,\ n > N$のとき$x_m > R,\ x_n > R$となる自然数$N$が存在する．このとき

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon, \quad m > N,\ n > N \tag{4.9}$$

となる．これは$f(x_n)$がCauchy列であることを意味するから$f(x_n)$は収束列である(定義3.7及び定理3.5)．よって$f(x_n)$の極限を$\alpha$とする．即ち，$f(x_n) \to \alpha (n \to \infty)$とする．(4.9)において$m$だけ$m \to \infty$とすると

$$|f(x_n) - \alpha| < \varepsilon, \quad n > N \tag{4.10}$$

となる．更に$n_1 > N$を満たす$n_1$を一つ固定して

$$|f(x) - \alpha| = |\{f(x) - f(x_{n_1})\} + \{f(x_{n_1}) - \alpha\}| \leqq |f(x) - f(x_{n_1})| + |f(x_{n_1}) - \alpha| \tag{4.11}$$

を考える．このとき$n_1 > N$としたから$x_{n_1} > R$である．よって(ⅱ)の条件より(4.11)の最右辺の第一項目は$\varepsilon$より小さくなる．即ち，

$$|f(x) - f(x_{n_1})| < \varepsilon, \quad n_1 > N,\ x_{n_1} > R,\ x > R \tag{4.12}$$

となる．次に(4.10)より(4.11)の最右辺の第二項目も$\varepsilon$より小さくなる．即ち，

$$|f(x_{n_1}) - \alpha| < \varepsilon \tag{4.13}$$

となる．よって(4.11), (4.12)及び(4.13)より

$$|f(x)-\alpha| \leqq |f(x)-f(x_{n_1})| + |f(x_{n_1})-\alpha| < \varepsilon+\varepsilon = 2\varepsilon \tag{4.14}$$

となる．$\varepsilon$ は任意の正の数だから $x \to \infty$ のとき $f(x)$ が収束する．よって示された．

(証明終わり)

【命題 4.1.1】

$0<|x-a|<\delta_0$ で定義されている関数 $f(x)$ が $x \to a$ のとき収束するならば極限は一意的である．

(証明)

$f(x)$ が $x \to a$ のとき $\alpha$ と $\beta$ に収束し，$\alpha \neq \beta$ と仮定して背理法で示す．$\alpha > \beta$ としても一般性は失わない．

仮定より，任意の正の数 $\varepsilon$ に対して，ある正の数 $\delta_1$,$\delta_2$ が存在し

$$|x-a|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)-\alpha|<\varepsilon, \quad |x-a|<\delta_2 \Rightarrow |f(x)-\beta|<\varepsilon$$

が成り立つ．このとき $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$ とすると

$$|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-\alpha|+|f(x)-\beta|<2\varepsilon$$

となるが，$\varepsilon>0$ は任意だから $\varepsilon = \frac{\alpha-\beta}{2} > 0$ とすると

$$|\alpha-\beta| = |\alpha-f(x)+f(x)-\beta| \leqq |f(x)-\alpha|+|f(x)-\beta| < 2\varepsilon = \alpha-\beta$$

となり矛盾する．よって示された． (証明終わり)

【命題 4.1.2】

$x \geqq R_0$ で定義されている関数 $f(x)$ が $x \to \infty$ のとき収束するならば極限は一意的である．

(証明)

$f(x)$ が $x \to \infty$ のとき $\alpha$ と $\beta$ に収束し，$\alpha \neq \beta$ と仮定して背理法で示す．$\alpha > \beta$ としても一般性は失わない．

仮定より，任意の正の数 $\varepsilon$ に対して，ある正の数 $R_1$,$R_2$ が存在し

$$x>R_1 \Rightarrow |f(x)-\alpha|<\varepsilon, \quad x>R_2 \Rightarrow |f(x)-\beta|<\varepsilon$$

が成り立つ．このとき $R=\max\{R_1,R_2\}$ とすると

$$x>R \Rightarrow |f(x)-\alpha|+|f(x)-\beta|<2\varepsilon$$

となるが，$\varepsilon>0$ は任意だから $\varepsilon = \frac{\alpha-\beta}{2} > 0$ とすると

$$|\alpha-\beta| = |\alpha-f(x)+f(x)-\beta| \leqq |f(x)-\alpha|+|f(x)-\beta| < 2\varepsilon = \alpha-\beta$$

となり矛盾する．よって示された． (証明終わり)

## 4.6 関数の極限と数列の極限

【命題 4.2.1】関数の極限と数列の極限 1

関数 $f(x)$ は $0 < |x-a| < \delta_0$ で定義されているとする．このとき次の ( i ) と ( ii ) は同値である．

( i )$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$

( ii )$0 < |a_n - a| < \delta_0$ かつ $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ であるような任意の数列 $\{a_n\}$ に対して $\lim_{n \to \infty} f(a_n) = \alpha$ である．

**(証明)**

( i )⇒( ii ) の証明

( i ) より任意の正の数 $\varepsilon$ に対して，ある正の数 $\delta(\delta < \delta_0)$ が存在し

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

となる．更に，$\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha$ だから，上の正の数 $\delta$ に対して，ある自然数 $N$ が定まり，$n > N$ なる全ての $n$ に対して，$|a_n - a| < \delta$ となる．これらをつなげば，$n > N$ なる全ての $n$ に対して，$|a_n - a| < \delta$ で $|f(a_n) - \alpha| < \varepsilon$ となり $\lim_{n \to \infty} f(a_n) = \alpha$ であることが示された．

( ii )⇒( i ) の証明

対偶をとって示す．即ち ( i ) でなければ ( ii ) でないことを示す．( i ) が成り立たないということは，ある正の数 $\varepsilon_0$ が存在し，正の数 $\delta$ をどのようにとっても

$$0 < |x_\delta - a| < \delta \quad \text{かつ} \quad |f(x_\delta) - \alpha| \geqq \varepsilon_0$$

を満たす $x_\delta$ が存在するということである．よって，$\delta = \dfrac{1}{n}$ として，$\delta$ に対応して定まる $x_\delta$ を $a_n$ として書き直すと

$$0 < |a_n - a| < \frac{1}{n} \quad \text{かつ} \quad |f(a_n) - \alpha| \geqq \varepsilon_0$$

となり，このような $\{a_n\}$ が存在すると，( ii ) が成り立たないので示された．

**(証明終わり)**

【命題 4.2.2】関数の極限と数列の極限 2

関数 $f(x)$ は $x \geqq R_0$ で定義されているとする．このとき次の ( i ) と ( ii ) は同値である．

( i ) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \alpha$

( ii )$a_n \geqq R_0$ かつ $\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$ であるような任意の数列 $\{a_n\}$ に対して $\lim_{n \to \infty} f(a_n) = \alpha$ である．

**(証明)**

( i )⇒( ii ) の証明

( i ) より任意の正の数 $\varepsilon$ に対して，ある正の数 $R(R > R_0)$ が存在し

$$x > R \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

となる．更に，$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ だから，上の正の数 $R$ に対して，ある自然数 $N$ が定まり，$n > N$ なる全ての $n$ に対して，$a_n > R$ となる．これらをつなげば，$n > N$ なる全ての $n$ に対して，$|f(a_n) - \alpha| < \varepsilon$ となり $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \alpha$ であることが示された．

(ⅱ)⇒(ⅰ) の証明

対偶をとって示す．即ち (ⅰ) でなければ (ⅱ) でないことを示す．(ⅰ) が成り立たないということは，ある正の数 $\varepsilon_0$ が存在し，正の数 $R$ をどのようにとっても

$$x_R > R \quad かつ \quad |f(x_R) - \alpha| \geqq \varepsilon_0$$

を満たす $x_R$ が存在するということである．よって，$R = n$ として，$R(= n)$ に対応して定まる $x_R$ を $a_n$ として書き直すと

$$a_n > R \quad かつ \quad |f(a_n) - \alpha| \geqq \varepsilon_0$$

となり．$R$ は任意だから，このような $\{a_n\}$ が存在すると，(ⅱ) が成り立たないので示された．

(証明終わり)

【命題 4.3】

$x \geqq R_0$ で定義されている関数 $f(x)$ が $x \to \infty$ のときある数 $\alpha$ に収束するならば，$x \geqq R_0$ で $f(x)$ は有界である．

(証明)

定義 4.4.2 より，任意の正の数 $\varepsilon$ に対して，ある $R(R > R_0)$ が存在し

$$x > R \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

が成り立つ．$\varepsilon$ は任意の正の数だから $\varepsilon = 1$ としてもよい．よって

$$x > R \Rightarrow |f(x) - \alpha| < 1$$

となるような $R$ が存在する．ここで

$$M_1 = \sup_{R_0 \leqq x \leqq R} |f(x)|, \quad M_2 = \max\{M_1, |\alpha| + 1\}$$

とおく．$M_1$ と $M_2$ の決め方から明らかに $R_0 \leqq x \leqq R$ では $|f(x)| \leqq M_2$ が成り立つ．$x > R$ のときは

$$|f(x)| = |f(x) - \alpha + \alpha| \leqq |f(x) - \alpha| + |\alpha| < 1 + |\alpha| \leqq M_2$$

が成り立つ．以上より $x \geqq R_0$ で $f(x)$ は有界である． (証明終わり)

【命題 4.4.1】

$x \geqq R_0$ で定義された関数 $f(x)$ が単調増加かつ上に有界ならば，$\lim_{x\to\infty} f(x)$ は収束する．

(証明)

$x \geqq R_0$ で $f(x)$ のとる値の集合を $A$ とする．$f(x)$ は上に有界だから命題 2.1 より $A$ は上限 $\alpha$ を有する．定義 2.4 の (ⅰ) で定めた上限の定義より，$x \geqq R_0$ なる任意の $x$ に対して $f(x) \leqq \alpha$ である．次に，定義 2.4 の (ⅱ) で定めた上限の定義より，任意の正の数 $\varepsilon$ に対して

$$\alpha - \varepsilon < f(R) \leqq \alpha$$

$$\therefore -\varepsilon < f(R) - \alpha \leqq 0$$

を満たす $f(R)(R > R_0)$ が存在する．$f(x)$ は単調増加だから $x > R$ なる全ての $x$ に対して

$$-\varepsilon < f(R) - \alpha \leqq f(x) - \alpha \leqq 0$$

$$\therefore |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

となるから収束の定義より示された. (証明終わり)

【命題 4.4.2】
$x \geqq R_0$ で定義された関数 $f(x)$ が単調減少かつ下に有界ならば，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ は収束する．

(証明)
$x \geqq R_0$ で $f(x)$ のとる値の集合を $A$ とする．$f(x)$ は上に有界だから命題 2.1 より $A$ は下限 $\beta$ を有する．定義 2.4 の ( i ') で定めた下限の定義より，$x \geqq R_0$ なる任意の $x$ に対して $f(x) \geqq \beta$ である．次に，定義 2.4 の ( ii ') で定めた下限の定義より，任意の正の数 $\varepsilon$ に対して

$$\beta \leqq f(R) < \beta + \varepsilon$$

$$\therefore 0 \leqq f(R) - \beta < \varepsilon$$

を満たす $f(R)(R > R_0)$ が存在する．$f(x)$ は単調増加だから $x > R$ なる全ての $x$ に対して

$$0 \leqq f(x) - \beta \leqq f(R) - \beta < \varepsilon$$

$$\therefore |f(x) - \beta| < \varepsilon$$

となるから示された. (証明終わり)

【例 4.2】
$\lim\limits_{x\to\infty} e^{-\lambda x} = 0 \ \ (\lambda > 0)$ を示す.

(証明)
$f(x) = e^{-\lambda x} = 0 \ \ (\lambda > 0)$ とおくと，全ての $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) > 0$ だから下に有界で $f(x)$ のとる値の集合を $A$ とすると $\inf A = 0$ である．また，$\delta > 0$ に対して

$$f(x+\delta) = e^{-\lambda(x+\delta)} = e^{-\lambda x}e^{-\delta\lambda} = e^{-\delta\lambda}f(x)$$

となる．ここで $0 < e^{-\delta\lambda} < 1$ だから

$$f(x+\delta) = e^{-\delta\lambda}f(x) < f(x)$$

となる．以上より $f(x)$ は狭義単調減少で下に有界だから，命題 4.4.2 より $\inf A = 0$ に収束する． (証明終わり)

## 4.7　連続性

【定義 4.6】1 点での連続性

関数 $f(x)$ は $a$ を含む区間 $I$ 上で定義されているとする．そのとき $f(x)$ が $a$ で連続であるとは，任意の正の数 $\varepsilon$ に対して，ある正の数 $\delta$ が存在して，$x \in I$ なる全ての $x$ について

$$|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon \tag{4.15}$$

が成り立つことである．即ち，$\lim_{x \to a} f(x)$ が存在して

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \tag{4.16}$$

が成り立つことである．(はじめから $f(x)$ は $x=a$ で定義されている．)

【定義 4.7】1 点での右連続性と左連続性

関数 $f(x)$ は区間 $[a,d)$ 上で定義されているとする．そのとき，$f(x)$ が $x=a$ で右連続であるとは，右極限 $f(a+0) = \lim_{x \to a+0} f(x)$ が存在して

$$f(a+0) = \lim_{x \to a+0} f(x) = f(a) \tag{4.17}$$

が成り立つことをいう．同様に $f(x)$ が $(c,a]$ 上で定義されているとき，$f(x)$ が $x=a$ で左連続であるとは，

左極限 $f(a-0) = \lim_{x \to a-0} f(x)$ が存在して

$$f(a-0) = \lim_{x \to a-0} f(x) = f(a) \tag{4.18}$$

が成り立つことをいう．

【定義 4.8】区間での連続性

関数 $f(x)$ は区間 $I$ 上で定義されているとする．そのとき，$f(x)$ は区間 $I$ で連続 (または $I$ 上で連続) であるとは，$f(x)$ が $I$ の全ての点 $a$ において連続であることをいう．このとき，$f(x)$ を区間 $I$ 上の連続関数ともいう．但し，$a$ が $I$ の左端であるときには $f(x)$ は $x=a$ で右連続，$a$ が $I$ の右端であるときには $f(x)$ は $x=a$ で左連続であるとする．

【補題 4.1】

関数 $f(x)$ は $a$ を含む区間 $I$ 上で定義されているとする．$f(x)$ が $a$ で連続ならば $f(x)$ は $a$ の近傍で有界である．

**(証明)**

仮定より，任意の正の数 $\varepsilon$ に対して，ある正の数 $\delta$ が存在して

$$|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon$$

が成り立つ．$\varepsilon$ は任意の正の数だから $\varepsilon = 1$ とすると

$$|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < 1$$

となるが $|f(x)|-|f(a)| \leqq |f(x)-f(a)|<1$ だから

$$|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)|<|f(a)|+1$$

となり示された. (証明終わり)

【命題 4.5】

関数 $f(x), g(x)$ は $a$ を含む区間 $I$ 上で定義されているとする．$f(x), g(x)$ が $a$ で連続ならば $f(x)g(x)$ も $a$ で連続である.

(証明)

仮定と補題 4.1 より，任意の正の数 $\varepsilon$ に対して，ある正の数 $\delta_1, \delta_2, M_1, M_2$ が存在して

$$|x-a|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon, \quad |f(x)|<M_1$$

$$|x-a|<\delta_2 \Rightarrow |g(x)-g(a)|<\varepsilon, \quad |g(x)|<M_2$$

が成り立つ．$\delta=\min\{\delta_1, \delta_2\}, M=\max\{M_1, M_2\}$ とすると，$|x-a|<\delta$ ならば

$$\begin{aligned}|f(x)g(x)-f(a)g(a)| &= |f(x)\{g(x)-g(a)\}+g(a)\{f(x)-f(a)\}| \\ &< |\varepsilon f(x)+\varepsilon g(a)| \\ &\leqq \varepsilon|f(x)|+\varepsilon|g(a)| \\ &< \varepsilon M+\varepsilon|g(a)| = \varepsilon(M+|g(a)|)\end{aligned}$$

となり，$\varepsilon$ は任意の正の数であるから示された. (証明終わり)

## 4.8 Weierstrass(ワイエルシュトラス) の最大値最小値存在定理

【定理 4.2】Weierstrass の最大値最小値存在定理

有界閉区間 $I=[a,b]$ で連続な関数 $f(x)$ は $[a,b]$ 上で有界で最大値と最小値をとる.

(証明)

まず最初に，$f(x)$ が $I=[a,b]$ 上で有界あることを背理法で示す．$f(x)$ が有界でないと仮定すると，任意の自然数 $n$ に，$x_n \in I$ で $|f(x_n)| \geqq n$ を満たす数列 $\{x_n\}$ が存在する．$x_n \in I$ だから $\{x_n\}$ は有界である．従って，Bolzano-Weierstrass の定理 (定理 3.4) より，数列 $\{x_n\}$ は収束する部分列 $\{x_{n(k)}\}$ を有する．部分列だから当然 $|f(x_{n(k)})| \geqq n(k)$ が成り立つ．ここで $n(k) \geqq k$ だから $n(k) \to \infty (k \to \infty)$ である．$\{x_{n(k)}\}$ は収束するから $\lim_{k\to\infty} x_{n(k)} = c$ とおくと，命題 3.1 より $a \leqq x_{n(k)} \leqq b$ だから $a \leqq c \leqq b$ となる．即ち $c \in I=[a,b]$ となる．$f(x)$ が $I=[a,b]$ で連続あることと命題 4.2.1 より $\lim_{k\to\infty} f(x_{n(k)}) = f(c)$ となる．よって $\{f(x_{n(k)})\}$ は収束するから定理 3.1 より有界となる．これは $|f(x_{n(k)})| \geqq n(k), n(k) \to \infty (k \to \infty)$ であると仮定したこと，即ち，有界でないと仮定したことに矛盾する．以上より $f(x)$ は $I=[a,b]$ で有界であることが示された.

次に $f(x)$ が $I=[a,b]$ で最大値をとることを示す．$f(x)$ が $I=[a,b]$ で有界であることが示されたので，集合 $A=\{f(x)|x \in [a,b]\}$ とすると，$A$ は空でなく有界であ

る．よって命題 2.1 より上限 $\sup A$ と下限 $\inf A$ が存在する．$\sup A = \alpha$ とおくと命題 3.3.1 より，$a_n \in A, \lim_{n\to\infty} a_n = \sup A = \alpha$ を満たす数列 $\{a_n\}$ が存在する．集合 $A$ の定義の仕方より，各自然数 $n$ に対して，区間 $I = [a,b]$ 内の点 $y_n$ で，$f(y_n) = a_n$ を満たすものが存在する．$\{y_n\}_n$ は有界だから Bolzano-Weierstrass の定理 (定理 3.4) より，収束する部分列 $\{y_{n(k)}\}_k$ を有する．ここで $n(k) \geqq k$ だから $n(k) \to \infty (k \to \infty)$ である．また，部分列だから当然 $f(y_{n(k)}) = a_{n(k)}$ が成り立つ．$f(y_{n(k)})$ は収束するから $\lim_{k\to\infty} y_{n(k)} = p$ とおくと，命題 3.1 より，$a \leqq y_{n(k)} \leqq b$ だから $a \leqq p \leqq b$ となる．$f(x)$ は $I = [a,b]$ で連続だから

$$f(p) = \lim_{k\to\infty} f(y_{n(k)}) = \lim_{k\to\infty} a_{n(k)} = \alpha = \sup A$$

となる．なぜならば，定理 3.3 より $\{a_n\}_n$ が $\alpha$ に収束するならば部分列 $\{a_{n(k)}\}_k$ も $\alpha$ に収束する．$\alpha$ は $A$ の上限だから $x \in I$ なる全ての $x$ に対して $f(x) \leqq \alpha = f(p)$ となるので $x = p$ で最大値をとることが示された．

最後に $f(x)$ が $I = [a,b]$ で最小値をとることを示す．$\inf A = \beta$ とおくと命題 3.3.2 より，$b_n \in A, \lim_{n\to\infty} b_n = \inf A = \beta$ を満たす数列 $\{b_n\}$ が存在する．集合 $A$ の定義の仕方より，各自然数 $n$ に対して，区間 $I = [a,b]$ 内の点 $z_n$ で，$f(z_n) = b_n$ を満たすものが存在する．$\{z_n\}_n$ は有界だから Bolzano-Weierstrass の定理 (定理 3.4) より，収束する部分列 $\{z_{n(k)}\}_k$ を有する．ここで $n(k) \geqq k$ だから $n(k) \to \infty (k \to \infty)$ である．また，部分列だから当然 $f(z_{n(k)}) = b_{n(k)}$ が成り立つ．$f(z_{n(k)})$ は収束するから $\lim_{k\to\infty} z_{n(k)} = q$ とおくと，命題 3.1 より，$a \leqq z_{n(k)} \leqq b$ だから $a \leqq q \leqq b$ となる．$f(x)$ は $I = [a,b]$ で連続だから

$$f(q) = \lim_{k\to\infty} f(z_{n(k)}) = \lim_{k\to\infty} b_{n(k)} = \beta = \inf A$$

となる．なぜならば，定理 3.3 より $\{b_n\}_n$ が $\beta$ に収束するならば部分列 $\{b_{n(k)}\}_k$ も $\beta$ に収束する．$\beta$ は $A$ の下限だから $x \in I$ なる全ての $x$ に対して $f(x) \geqq \beta = f(q)$ となるので $x = q$ で最大値をとることが示された．**(証明終わり)**

## 4.9　一様連続

【定義 4.9】一様連続

$f(x)$ の定義域は区間 $I$ を含むとする．任意の正の数 $\varepsilon$ に対して，$x, x'$ に依存しない正の数 $\delta$ が存在して

$$x, x' \in I, |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon \tag{4.19}$$

が成り立つとき，$f(x)$ は $I$ で一様連続であるという．

【定理 4.3】

有界閉区間 $I = [a,b]$ で連続な関数は $I$ で一様連続である．

**(証明)**

背理法を用いる．$f(x)$ が有界閉区間 $I$ で連続であるが，一様連続でないと仮定すると，ある正の数 $\varepsilon_0$ が存在して，任意の正の数 $\delta$ に対して，$x_\delta, x'_\delta \in I$ で $|x_\delta - x'_\delta| < \delta$

かつ $|f(x_\delta)-f(x'_\delta)| \geqq \varepsilon_0$ を満たす $x_\delta, x'_\delta$ が存在する．各自然数 $n$ に対して，$\delta=\frac{1}{n}$ とし，この $\delta$ に対応する $x_\delta, x'_\delta$ をそれぞれ $x_n, x'_n \in I$ とすると[3]

$$|x_n - x'_n| < \frac{1}{n} \quad かつ \quad |f(x_n)-f(x'_n)| \geqq \varepsilon_0 \tag{4.20}$$

となる．$x_n, x'_n \in I = [a,b]$ だから $\{x_n\}_n, \{x'_n\}_n$ は有界である．よって Bolzano-Weirstrass の定理 (定理 3.4) より収束する部分列を有する．それらを $\{x_{n(k)}\}_k, \{x'_{n(k)}\}_k$ として，$\lim_{k\to\infty} x_{n(k)} = \alpha, \lim_{k\to\infty} x'_{n(k)} = \beta$ とする．$\{x_{n(k)}\}_k, \{x'_{n(k)}\}_k$ は部分列だから当然 (4.20) を満たす．よって

$$|x_{n(k)} - x'_{n(k)}| < \frac{1}{n(k)} \quad かつ \quad |f(x_{n(k)})-f(x'_{n(k)})| \geqq \varepsilon_0 \tag{4.21}$$

が成り立つ．(4.21) の第一式に対して，$n(k) \geqq k$ だから $|x_{n(k)} - x'_{n(k)}| \to 0(k\to\infty)$ となるので $\alpha=\beta$ となる．命題 3.1 より，$a \leqq x_{n(k)} \leqq b$ だから $a \leqq \alpha \leqq b$ となる．$f(x)$ は $I=[a,b]$ で連続だから，$f(x_{n(k)})$ と $f(x'_{n(k)})$ は $k\to\infty$ のとき，ともに $f(\alpha)$ に収束する．これは (4.21) の第二式に矛盾する．よって示された． **(証明終わり)**

【例 4.3.1】

$f(x)=x^2$ は $I=[-R,R](R>0)$ で一様連続である．

**(証明)**

$x, x' \in I$ のとき

$$|f(x)-f(x')| = |x^2-(x')^2| = |x+x'||x-x'| \leqq 2R|x-x'|$$

となるから，任意の正の数 $\varepsilon$ に対して $x, x'$ に依存しない正の数 $\delta$ を $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2R}$ と定めると $|x-x'| < \delta = \dfrac{\varepsilon}{2R}$ のとき常に

$$|f(x)-f(x')| \leqq 2R|x-x'| < 2R\cdot\frac{\varepsilon}{2R} = \varepsilon$$

となるから示された． **(証明終わり)**

【例 4.3.2】

$f(x)=x^2$ は $I=\mathbb{R}$ で一様連続でない．

**(証明)**

背理法で示す．任意の正の数 $\varepsilon$ に対して，$x_n, x'_n \in I$ に依存しない正の数 $\delta$ が存在し

$$x_n, x'_n \in I, |x_n-x'_n| < \delta \Rightarrow |f(x_n)-f(x'_n)| < \varepsilon$$

が成り立っていると仮定する．

$x_n = n, x'_n = n+\frac{\delta}{2}$($n$ は自然数) とすると[4] $|x_n - x'_n| = \frac{\delta}{2} < \delta$ である．このとき

$$|f(x_n)-f(x'_n)| = \left| n^2 - \left(n+\frac{\delta}{2}\right)^2 \right| = n\delta + \frac{\delta^2}{4}$$

となる．ところが，$\varepsilon>0, \delta>0$ だから Archimedes の原理 (命題 2.3) より $n\delta > \varepsilon$ となる自然数 $n$ が存在する．これは $|f(x_n)-f(x'_n)| < \varepsilon$ であることに矛盾する．よって示された． **(証明終わり)**

[3] $\delta$ は $x_n, x'_n$ に依存していない

[4] $\delta$ は $x_n, x'_n$ に依存していない

【例 4.3.3】

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ は $I = (a, \infty)(a > 0)$ で一様連続である．

**(証明)**

$x, x' \in I$ のとき

$$|f(x) - f(x')| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x'}\right| = \left|\frac{x' - x}{xx'}\right| < \frac{|x - x'|}{a^2}$$

となるから，任意の正の数 $\varepsilon$ に対して，$x, x'$ に依存しないある正の数 $\delta$ を $\delta = a^2\varepsilon$ と定めると

$$|f(x) - f(x')| =< \frac{|x - x'|}{a^2} < \frac{1}{a^2} \cdot a^2\varepsilon = \varepsilon$$

となるから示された． **(証明終わり)**

【例 4.3.4】

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ は $I = (0, \infty)$ で一様連続でない．

**(証明)**

背理法で示す．任意の正の数 $\varepsilon$ に対して，$x_n, x'_n \in I$ に依存しない正の数 $\delta$ が存在して

$$x_n, x'_n \in I, |x_n - x'_n| < \delta \Rightarrow |f(x_n) - f(x'_n)| < \varepsilon$$

が成り立つと仮定する．$x_n = \frac{1}{n}, x'_n = \frac{1}{n} + \frac{\delta}{2}$ ($n$ は自然数) とすると[5]，$|x_n - x'_n| = \frac{\delta}{2} < \delta$ である．このとき

$$|f(x_n) - f(x'_n)| = \left|n - \frac{1}{\frac{1}{n} + \frac{\delta}{2}}\right| = \left|\frac{n^2\delta}{2 + n\delta}\right| = \left|\frac{n\delta}{\frac{2}{n} + \delta}\right|$$

となる．ところが $\varepsilon > 0, \delta > 0$ だから，Archimedes の原理 (命題 2.3) より

$$n\delta > \varepsilon(2 + \delta) > \varepsilon\left(\frac{2}{n} + \delta\right)$$

となる自然数 $n$ が存在するから $|f(x_n) - f(x'_n)| < \varepsilon$ であることに矛盾する．よって示された． **(証明終わり)**

## 4.10 区分的に連続

【定義 4.10】区分的に連続

関数 $f(x)$ は区間 $I$ で定義されているとする．関数 $f(x)$ が区間 $I$ で区分的に連続であるとは，この区間内の有限個の不連続点 $d_i (i = 1, \cdots, n)$ を除いて連続で，不連続点 $d_i$ では右極限 $f(d_i + 0) = \lim_{x \to d_i + 0} f(x)$ と左極限 $f(d_i - 0) = \lim_{x \to d_i - 0} f(x)$ が存在することをいう．但し，右極限 $f(d_i + 0)$ と左極限 $f(d_i - 0)$ は異なる値でもよい．この定義より，有界閉区間上で区分的に連続な関数は有界である．

[5] $\delta$ は $x_n, x'_n$ に依存していない

# 5　積分

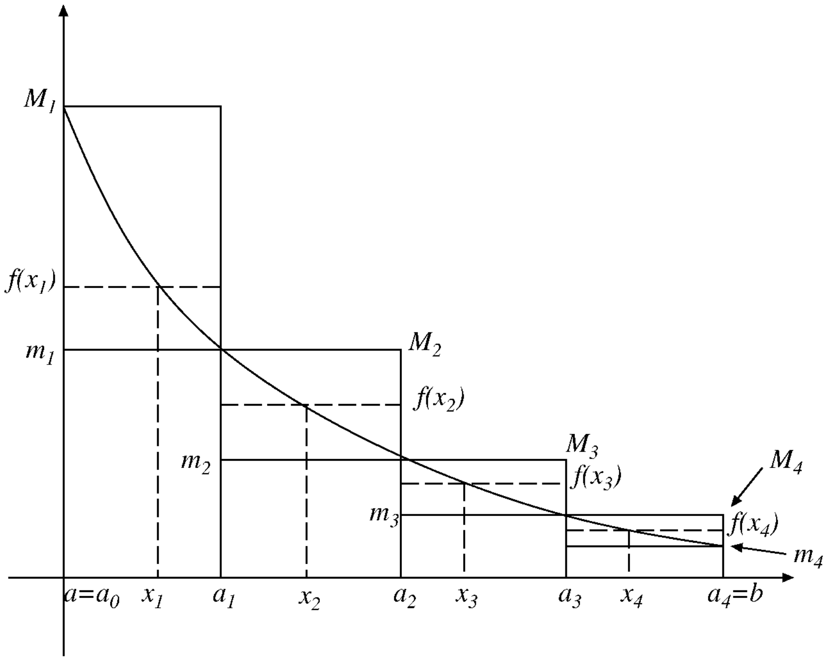


**Fig.5.1**　Darboux 和と Riemann 和

## 5.1　分割

【定義 5.1】分割

有界閉区間 $[a,b]$ の分割とは，有限点列 $P=\{a_0,a_1,\cdots,a_n\}$ で $a=a_0<a_1<\cdots<a_{n-1}<a_n=b$ となるもののことである．各 $a_i$ を分割 $P$ の分点という．$I_i=[a_{i-1},a_i](1\leqq i\leqq n)$ を部分閉区間と呼ぶことにし，それらの幅の最大値 $\max\limits_{1\leqq i\leqq n}(a_i-a_{i-1})=\max\limits_{1\leqq i\leqq n}|I_i|$ を分割 $P$ の幅といい $d(P)$ で表すことにする．ここで $|I_i|$ は部分閉区間 $I_i$ の長さを表すものとした．

区間 $I$ は部分閉区間 $I_i$ の重なり合わない集まりで表される．この表現を使って同じ分割 $P$ を $P=\{I_i\}_{i=1}^n$ で表すこともある．区間 $I=[a,b]$ の長さを $|I|$ で表すとすると，区間 $I$ の分割 $P=\{I_i\}_{i=1}^n$ に対して $|I|=\displaystyle\sum_{i=1}^n|I_i|$ が成り立つ．

## 5.2　上 Darboux(ダルブー) 和 (上限和) と下 Darboux 和 (下限和)

【定義 5.2】上 Darboux 和 (上限和) と下 Darboux 和 (下限和)

閉区間 $I=[a,b]$ 上の有界な関数 $f(x)$ を考える．$I$ の分割 $P=\{I_i\}_{i=1}^n=\{a_0,a_1,\cdots,a_n\}$ に対して

$$m_i(f;P)=\inf_{a_{i-1}\leqq x\leqq a_i}f(x),\quad M_i(f;P)=\sup_{a_{i-1}\leqq x\leqq a_i}f(x)\tag{5.1}$$

とおく．ここで $\inf\limits_{a_{i-1}\leqq x\leqq a_i}f(x)$ は実数の有界集合 $\{f(x)|a_{i-1}\leqq x\leqq a_i\}$ の下限を表し，

$\sup_{a_{i-1} \leqq x \leqq a_i} f(x)$ はその上限を表す．次に，

$$s(f;P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f;P)|I_i|, \quad S(f;P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(f;P)|I_i| \tag{5.2}$$

とおく ($|I_i| = a_i - a_{i-1}$)．$s(f;P)$ と $S(f;P)$ をそれぞれ $P$ に関する $f(x)$ の下 Darboux 和 (下限和) と上 Darboux 和 (上限和) という．(**Fig5.1** 参照)

【補題 5.1】
　有界閉区間 $I = [a,b]$ で有界な関数 $f(x)$ に対して $P$ を $I$ の分割とするとき

$$s(f;P) \leqq S(f;P) \tag{5.3}$$

である．
**(証明)**
$P = \{I_i\}_{i=1}^n$ とすると，定義より各 $i$ に対して

$$m_i(f;P) = \inf_{x \in I_i} f(x) \leqq \sup_{x \in I_i} f(x) = M_i(f;P)$$

よって

$$m_i(f;P)|I_i| \leqq M_i(f;P)|I_i|$$

が成り立つ．これを $i$ について加えると

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(f;P)|I_i| = s(f;P) \leqq S(f;P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(f;P)|I_i|$$

となり示された.　　**(証明終わり)**

## 5.3　細分

【定義 5.3】
　有界閉区間 $I = [a,b]$ で有界な関数 $f(x)$ に対して $P = \{I_i\}_{i=1}^n, Q = \{J_j\}_{j=1}^m$ を $I$ の分割とするとき，$Q$ が $P$ の細分であるとは $1 \leqq j \leqq m$ なる任意の $j$ に対して，$J_j \subset I_i$ なる $i (1 \leqq i \leqq n)$ が存在することである．分点でいえば $Q$ の分点が $P$ の分点を含むことである (**Fig.5.2** 参照).

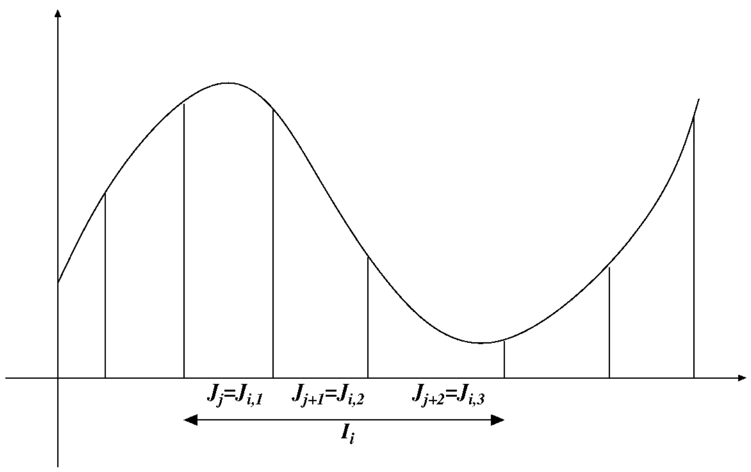


**Fig.5.2**　細分の説明図

【補題 5.2】　$Q$ が $P$ の細分ならば,

$$s(f;P) \leqq s(f;Q), \quad S(f;P) \geqq S(f;Q) \tag{5.4}$$

(証明)

$Q = \{J_j\}_{j=1}^m$ は $P = \{I_i\}_{i=1}^n$ の細分だから $P$ の部分閉区間 $I_i$ は $Q$ の部分閉区間 $J_j$ の合併として表される．$P$ の部分閉区間 $I_i$ に含まれる $Q$ の部分閉区間の総数を $r_i$ 個とすると，$I_i = \bigcup_{k=1}^{r_i} J_{i,k}$ と表せる．ここで，$Q$ の部分閉区間で $I_i$ に含まれるものを $J_{i,k}(1 \leqq k \leqq r_i)$ とした．このとき $|I_i| = \sum_{k=1}^{r_i} |J_{i,k}|$ である．区間が広くなるとその区間での $f(x)$ の下限 $\inf f(x)$ は増加することはなく，そのままか減少するかのどちらかである．よって $J_{i,k} \subset I_i$ であるから

$$m_i(f;I_i) = \inf_{x \in I_i} f(x) \leqq \inf_{x \in J_{i,k}} f(x) = m_i(f;J_{i,k})$$

また $|I_i| = \sum_{k=1}^{r_i} |J_{i,k}|$ だから

$$m_i(f;I_i)|I_i| = m_i(f;I_i)\sum_{k=1}^{r_i} |J_{i,k}| = \sum_{k=1}^{r_i} m_i(f;I_i)|J_{i,k}| \leqq \sum_{k=1}^{r_i} m_i(f;J_{i,k})|J_{i,k}|$$

これを $i$ について加えると

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(f;I_i)|I_i| \leqq \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{r_i} m_i(f;J_{i,k})|J_{i,k}|$$

ここで

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(f;I_i)|I_i| = s(f;P)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{r_i} m_i(f;J_{i,k})|J_{i,k}| = \sum_{j=1}^{m} m_j(f;J_j)|J_j| = s(f;Q)$$

であるので $s(f;P) \leqq s(f;Q)$ が示された．

次に，区間が広くなるとその区間での $f(x)$ の上限 $\sup f(x)$ は減少することはなく，そのままか増加するかのどちらかである．よって $J_{i,k} \subset I_i$ であるから

$$M_i(f;J_{i,k}) = \sup_{x \in J_{i,k}} f(x) \leqq \sup_{x \in I_i} f(x) = M_i(f;I_i)$$

また $|I_i| = \sum_{k=1}^{r_i} |J_{i,k}|$ だから

$$M_i(f;I_i)|I_i| = M_i(f;I_i)\sum_{k=1}^{r_i} |J_{i,k}| = \sum_{k=1}^{r_i} M_i(f;I_i)|J_{i,k}| \geqq \sum_{k=1}^{r_i} M_i(f;J_{i,k})|J_{i,k}|$$

これを $i$ について加えると

$$\sum_{i=1}^{n} M_i|I_i| \geqq \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{r_i} M_i(f;J_{i,k})|J_{i,k}|$$

となる．ここで

$$\sum_{i=1}^{n} M_i|I_i| = S(f;P)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{r_i} M_i(f;J_{i,k})|J_{i,k}| = \sum_{j=1}^{m} M_j(f;J_j)|J_j| = S(f;Q)$$

となるので $S(f;P) \geqq S(f;Q)$ が示された． **(証明終わり)**

【系 5.1】

補題 5.1 と 5.2 より

$$s(f;P) \leqq s(f;Q) \leqq S(f;Q) \leqq S(f;P) \tag{5.5}$$

が成り立つ．

【命題 5.1】

有限区間 $I = [a,b]$ で有界な関数 $f(x)$ に対して，$P, Q$ を $I$ の任意の分割とする．更に，$P$ の分点と $Q$ の分点を全て合わせてできる分割を $R$ としたとき

$$s(f;P) \leqq s(f;R) \leqq S(f;R) \leqq S(f;Q) \tag{5.6}$$

である．

**(証明)**

補題 5.1 より

$$s(f;R) \leqq S(f;R)$$

が成り立つ．更に $R$ は $P$ と $Q$ の細分であるから，補題 5.2 より

$$s(f;P) \leqq s(f;R) \leqq S(f;R) \leqq S(f;Q)$$

となる． **(証明終わり)**

【系 5.2】

命題 5.1 のより，$I$ の任意の二つの分割 $P, Q$ に対して

$$s(f;P) \leqq S(f;Q) \tag{5.7}$$

が成り立つことがわかる．

## 5.4 積分可能，定積分

【定義 5.4】積分可能，定積分

命題 5.1 より $P$ が有界閉区間 $[a,b]$ のどのような分割になっても，$s(f;P)$ のとる値の集合は上に有界であり，$S(f;P)$ のとる値の集合は下に有界である．よって命題 2.1 より，$s(f;P)$ のとる値の集合には上限が存在し，$S(f;P)$ のとる値の集合には下限が存在する．そこで

$$s(f) = \sup_{P} s(f;P), \quad S(f) = \inf_{P} S(f;P) \tag{5.8}$$

とおく．ここで $\sup\limits_{P} s(f;P)$ は $P$ が $[a,b]$ の分割全てを動くときに $s(f;P)$ の取り得る値の集合の上限を表し，$\inf\limits_{P} S(f;P)$ は $P$ が $[a,b]$ の分割全てを動くときに $S(f;P)$ の取り得る値の集合の下限を表す．このとき，命題 5.1 より

$$s(f;P) \leqq s(f) \leqq S(f) \leqq S(f;P) \tag{5.9}$$

となる．$s(f) = S(f)$ のとき，$f(x)$ は $[a,b]$ で積分可能または可積分であるといい，この値を

$$\int_a^b f(x)dx \tag{5.10}$$

と書いて，$a$ から $b$ までの $f(x)$ の積分または定積分という．

## 5.5 Riemann(リーマン) 和

【定義 5.5】Riemann(リーマン)和

有界閉区間 $I = [a,b]$ の分割 $P = \{a_0, a_1, \cdots, a_n\}(a = a_0 < a_1 < \cdots, < a_n = b)$ に対して $a_{i-1} \leqq x_i \leqq a_i (1 \leqq i \leqq n)$ となる有限点列 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ を $P$ の代表値系という．区間 $[a,b]$ で有界な関数 $f(x)$ に対して

$$R(f;P,X) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(a_i - a_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)|I_i| \tag{5.11}$$

を $P, X$ に関する $f(x)$ の Riemann 和という (**Fig.5.1** 参照).

【補題 5.3】

有界閉区間 $I = [a,b]$ で有界な関数 $f(x)$ に対して

$$s(f;P) \leqq R(f;P) \leqq S(f;P) \tag{5.12}$$

である．

**(証明)**

定義 5.2 より

$$m_i(f;P) = \inf_{x \in I_i} f(x) \leqq f(x_i) \leqq \sup_{x_i \in I_i} f(x) = M_i(f;P)$$

$$\therefore \quad m_i(f;P)|I_i| \leqq f(x_i)|I_i| \leqq M_i(f;P)|I_i|, \quad |I_i| = a_i - a_{i-1}$$

これを $i$ に関して加えると

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(f;P)|I_i| \leqq \sum_{i=1}^{n} f(x_i)|I_i| \leqq \sum_{i=1}^{n} M_i(f;P)|I_i|$$

$$\therefore \quad s(f;P) \leqq R(f;P,X) \leqq S(f;P)$$

**(証明終わり)**

【定義 5.6】Riemann 和からの定積分

有界閉区間 $I = [a, b]$ で有界な関数 $f(x)$ に対して，$P = \{I_i\}_{i=1}^{n} = \{a_0, a_1, \cdots, a_n\}(a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b)(I_i = [a_{i-1}, a_i])$ を $I$ の分割とする．このとき，上限和 $S(f; P)$, 下限和 $s(f; P)$ 及び Riemann 和 $R(f; P, X)$ と $n$ の関係を強調するために，以下ではそれぞれ，$S_n(f; P)$, $s_n(f; P)$ 及び $R_n(f; P, X)$ と表すことにする．

定義 5.4 より，$f(x)$ が区間 $I = [a, b]$ で積分可能であれば

$$s_n(f; P) \leqq s(f) = \int_a^b f(x)dx = S(f) \leqq S_n(f; P) \tag{5.13}$$

が成り立つ．これと命題 5.1 より，$s_n(f; P)$ は単調増加で上に有界であり，$S_n(f; P)$ は単調減少で下に有界である．よって，定理 3.2 より，$s_n(f; P)$ は上限に収束し，$S_n(f; P)$ は下限に収束する．定義 5.4 より

$$s(f) = \sup_P s_n(f; P), \quad S(f) = \inf_P S_n(f; P) \tag{5.14}$$

で，$\sup\limits_P s_n(f; P)$ は $P$ が区間 $I = [a, b]$ の分割全てを動くときの $s_n(f; P)$ の取り得る値の集合の上限を表し，$\inf\limits_P S_n(f; P)$ は同様に $P$ が動くときの $S_n(f; P)$ の取り得る値の集合の下限を表す.

よって $f(x)$ が区間 $I = [a, b]$ で積分可能ならば

$$\lim_{n\to\infty} s_n(f; P) = s(f) = \int_a^b f(x)dx \tag{5.15}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f; P) = S(f) = \int_a^b f(x)dx \tag{5.16}$$

となる．また，補題 5.3 より，任意の $n$ に対して

$$s_n(f; P) \leqq R_n(f; P, X) \leqq S_n(f; P) \tag{5.17}$$

となる．(5.15)，(5.16) 及び (5.17) に対して，はさみうちの原理 (命題 3.2) より

$$\lim_{n\to\infty} R_n(f; P, X) = \int_a^b f(x)dx \tag{5.18}$$

となる．$n \to \infty$ のとき，分割 $P$ の幅 $d(P) = \max\limits_{1\leqq i\leqq n}(a_i - a_{i-1}) \to 0$ となる．従って，$d(P) \to 0$ としたときの極限が代表値系 $X$ の取り方に関わらず，有限な値で存在するとき，$f(x)$ は $[a, b]$ で積分可能（可積分）であると定義できる．

【定理 5.1】

有界閉区間上の連続関数 $f(x)$ は積分可能である．

**(証明)**

$f(x)$ が $I = [a, b]$ で連続とすると，定理 4.3 よりこの区間で一様連続である．よって，任意の正の数 $\varepsilon$ に対して，$x, x'$ に依存しないある正の数 $\delta$ が存在して，$x, x' \in I, |x - x'| < \delta$ のとき常に $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ が成り立つ．そこで幅 $d(P)$ が $\delta$ より小さいような $I = [a, b]$ の分割 $P = \{a_0, a_1, \cdots, a_n\}(a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b)$ を一つとる．

各部分閉区間 $[a_{i-1}, a_i]$ で $f(x)$ は連続だから，Weierstrass の最大値最小値定理 (定理 4.2) より，$[a_{i-1}, a_i]$ に属する二点 $x_i, x_i'$ で

$$\begin{aligned} f(x_i) = m_i(f;P) = \inf_{a_{i-1} \leqq x \leqq a_i} f(x) = \min_{a_{i-1} \leqq x \leqq a_i} f(x) \\ f(x_i') = M_i(f;P) = \sup_{a_{i-1} \leqq x \leqq a_i} f(x) = \max_{a_{i-1} \leqq x \leqq a_i} f(x) \end{aligned} \tag{5.19}$$

となるものがある．

幅 $d(P)$ が $\delta$ よりも小さいから $|x_i - x_i'| < \delta$ となるので $f(x_i') - f(x_i) < \varepsilon$ である．よって定義 5.1 より

$$\begin{aligned} S(f;P) - s(f;P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(f;P)(a_i - a_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i(f;P)(a_i - a_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \{M_i(f;P) - m_i(f;P)\}(a_i - a_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \{f(x_i') - f(x_i)\}(a_i - a_{i-1}) \\ &< \sum_{i=1}^{n} \varepsilon(a_i - a_{i-1}) = \varepsilon \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) = \varepsilon(b-a) \end{aligned} \tag{5.20}$$

命題 5.1 と定義 5.4 より

$$s(f;P) \leqq s(f) \leqq S(f) \leqq S(f;P) \tag{5.21}$$

だから

$$0 \leqq S(f) - s(f) \leqq S(f;P) - s(f;P) \tag{5.22}$$

となる．よって (5.20) と (5.22) より

$$0 \leqq S(f) - s(f) < \varepsilon(b-a) \tag{5.23}$$

となる．ここで $\varepsilon$ は任意の正の数だから $S(f) = s(f)$ となる．よって, 定義 5.4 より ,$f(x)$ は $I = [a, b]$ で積分可能である． **(証明終わり)**

## 5.6 積分の領域に関する加法性

【補題 5.4】積分の領域に関する加法性

( i ) $f(x)$ が閉区間 $[a, c]$ で積分可能ならば，$f(x)$ は $[a, b], [b, c]$ 上 $(a < b < c)$ で積分可能で

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \tag{5.24}$$

が成り立つ．

( ii ) $f(x)$ が $[a, b], [b, c] (a < b < c)$ で積分可能ならば，$f(x)$ は $[a, c]$ で積分可能で (5.24) が成り立つ．

**(証明)**

(ｉ) の証明　仮定より，任意の正の数 $\varepsilon$ に対して $[a,c]$ の分割で

$$0 \leqq S(f,P) - s(f;P) < \varepsilon \tag{5.25}$$

を満たすものが存在する．$P$ に $b$ を分点として付け加えた分割を $P'$ とおくと，$P'$ は $P$ の細分となる．よって，補題 5.1 と補題 5.2 より

$$s(f;P) \leqq s(f;P') \leqq S(f;P') \leqq S(f;P) \tag{5.26}$$

となるから (5.25) と (5.26) より

$$0 \leqq S(f;P') - s(f;P') < \varepsilon \tag{5.27}$$

が成り立つ．$P'$ の $[a,b]$ 間の分点を定める $[a,b]$ の分割を $P_1$，$P'$ の $[b,c]$ 間の分点を定める $[b,c]$ の分割 $P_2$ とおくと

$$S(f;P') = S(f|[a,b];P_1) + S(f|[b,c];P_2) \tag{5.28}$$

$$s(f;P') = s(f|[a,b];P_1) + s(f|[b,c];P_2) \tag{5.29}$$

である．以下においては $S(f|[a,b];P_1) = S(f;P_1), S(f|[b,c];P_2) = S(f;P_2)$, $s(f|[a,b];P_1) = s(f;P_1), s(f|[b,c];P_2) = s(f;P_2)$ と書くことにする．(5.27), (5.28), 及び (5.29) より

$$0 \leqq S(f;P') - s(f;P') = \{S(f;P_1) - s(f;P_1)\} + \{S(f;P_2) - s(f;P_2)\} < \varepsilon \tag{5.30}$$

(5.30) の $\{\}$ 内は共に負でないので

$$0 \leqq S(f;P_1) - s(f;P_1) < \varepsilon, \quad 0 \leqq S(f;P_2) - s(f;P_2) < \varepsilon \tag{5.31}$$

となる．$\varepsilon$ は任意の正の数であるので，$f(x)$ が $[a,b], [b,c]$ 上で積分可能であることが示された．

(5.27) より

$$0 \leqq S(f;P') - s(f;P') < \varepsilon$$

$$\therefore S(f;P') - \varepsilon < s(f;P') \tag{5.27'}$$

また，定義 5.6 より

$$s(f;P') \leqq \int_a^c f(x)dx \leqq S(f;P') \tag{5.32}$$

だから，(5.27') と (5.32) より

$$S(f;P') - \varepsilon < s(f;P') \leqq \int_a^c f(x)dx \leqq S(f;P') \tag{5.33}$$

となるので，次が成り立つ

$$S(f;P') - \varepsilon < \int_a^c f(x)dx \leqq S(f;P') \tag{5.34}$$

次に，定義 5.6 より

$$s(f;P_1) \leqq \int_a^b f(x)dx \leqq S(f;P_1) \tag{5.35}$$

$$s(f;P_2) \leqq \int_b^c f(x)dx \leqq S(f;P_2) \tag{5.36}$$

となるので，これらを加えると (5.28) と (5.29) より

$$s(f;P') \leqq \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \leqq S(f;P') \tag{5.37}$$

(5.27') より

$$S(f;P') - \varepsilon < s(f;P')$$

だから，これと (5.37) より

$$S(f;P') - \varepsilon < \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \leqq S(f;P') \tag{5.38}$$

となる．これより

$$-S(f;P') \leqq -\int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx < -S(f;P') + \varepsilon \tag{5.39}$$

となる．(5.34) と (5.39) の各辺を足し合わせて

$$-\varepsilon < \int_a^c f(x)dx - \int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx < \varepsilon \tag{5.40}$$

となる．よって

$$\left| \int_a^c f(x)dx - \int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx \right| < \varepsilon \tag{5.41}$$

となり (5.24) が示された．
( ii ) の証明
$f(x)$ が $[a,b], [b,c]$ 上で積分可能であるから，任意の正の数 $\varepsilon$ に対して，$[a,b]$ の分割 $P_1$ と $[b,c]$ の分割 $P_2$ で

$$S(f;P_1) - s(f;P_1) < \varepsilon$$

$$S(f;P_2) - s(f;P_2) < \varepsilon$$

を満たすものが存在する．$P_1$ と $P_2$ をつなげてできる $[a,c]$ の分割を $P'$ とすると

$$S(f;P') = S(f;P_1) + S(f;P_2)$$

$$s(f;P') = s(f;P_1) + s(f;P_2)$$

だから

$$0 \leqq S(f;P') - s(f;P') = S(f;P_1) - s(f;P_1) + S(f;P_2) - s(f;P_2) < 2\varepsilon$$

となり $f(x)$ は $[a,c]$ で積分可能であるから ( i ) より (5.24) が成り立つことが示された。
**(証明終わり)**

【命題 5.2】積分の領域に関する加法性 2

$x_1 > x_2$ のとき $\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx := -\int_{x_2}^{x_1} f(x)dx$ と定めると，

$$\int_c^a f(x)dx = \int_b^a f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \tag{5.42}$$

は $a, b, c$ の大小関係に関わらず成り立つ．但し，$m = \min\{a, b, c\}, M = \max = \{a, b, c\}$ としたとき，$f(x)$ は $[m, M]$ で積分可能であるとする．

**(証明)**

$a < b < c$ の場合は補題 5.4 で示したので，それ以外の場合でも成り立つことを示す．

(ｉ)$a < c < b$ の場合，補題 5.4 より

$$\int_b^a f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

移項して，両辺に (-1) をかけると

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \left\{-\int_c^b f(x)dx\right\}$$

$b > c$ だから，上の定め方より

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

(ⅱ)$b < a < c$ の場合，補題 5.4 より

$$\int_b^c f(x)dx = \int_b^a f(x)dx + \int_a^c f(x)dx$$

移項して，両辺に (-1) をかけると

$$\int_a^c f(x)dx = \left\{-\int_b^a f(x)dx\right\} + \int_b^c f(x)dx$$

$a > b$ だから，上の定め方より

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

(ⅲ)$b < c < a$ の場合，補題 5.4 より

$$\int_b^a f(x)dx = \int_b^c f(x)dx + \int_c^a f(x)dx$$

移項して，

$$\left\{-\int_c^a f(x)dx\right\} = \left\{-\int_b^a f(x)dx\right\} + \int_b^c f(x)dx$$

$a > c, a > b$ だから，上の定め方より

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

(ⅳ)$c < a < b$ の場合，補題 5.4 より

$$\int_c^b f(x)dx = \int_c^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx$$

移項して，

$$\left\{-\int_c^a f(x)dx\right\} = \int_a^b f(x)dx + \left\{-\int_c^b f(x)dx\right\}$$

$a > c, b > c$ だから，上の定め方より

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

(ｖ) $c < b < a$ の場合，補題 5.4 より

$$\int_c^a f(x)dx = \int_c^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx$$

両辺に (-1) をかけて

$$\left\{-\int_c^a f(x)dx\right\} = \left\{-\int_c^b f(x)dx\right\} + \left\{-\int_b^a f(x)dx\right\}$$

$a > c, b > c, a > b$ だから，上の定め方より

$$\int_a^c f(x)dx = \int_b^c f(x)dx + \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

(証明終わり)

【命題 5.3】
$a < b$ とするとき，任意の $x \in [a, b]$ に対して，常に $f(x) \leqq g(x)$ ならば

$$\int_a^b f(x)dx \leqq \int_a^b g(x)dx \tag{5.43}$$

である．

**(証明)**

$[a, b]$ の分割を $P = \{I_i\}_{i=1}^n = \{a_0, a_1, \cdots, a_n\} (a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b)$ とし，$a_{i-1} \leqq x_i \leqq a_i (1 \leqq i \leqq n)$ なる $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ を $P$ の代表値系とすると，$f(x)$ と $g(x)$ に対する Riemann 和は定義 5.5 より，それぞれ，次のようになる．

$$R_n(f; P, X) = \sum_{i=1}^n f(x_i)(a_i - a_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(x_i)|I_i|$$

$$R_n(g; P, X) = \sum_{i=1}^n g(x_i)(a_i - a_{i-1}) = \sum_{i=1}^n g(x_i)|I_i|$$

仮定より $f(x_i) \leqq g(x_i) (1 \leqq i \leqq n)$ だから $R_n(f; P, X) \leqq R_n(g; P, X)$ となる．よって命題 3.1 と定義 5.6 より

$$\lim_{n\to\infty} R_n(f; P, X) = \int_a^b f(x)dx \leqq \int_a^b g(x)dx = \lim_{n\to\infty} R_n(g; P, X)$$

(証明終わり)

【定理 5.2】
区間 $I = [a, b]$ で区分的に連続な関数 $f(x)$ は $[a, b]$ 上で積分可能である．
**(証明)**

$f(x)$ は $I = [a, b]$ で区分的に連続であるから，区分的に連続であることの定義 (定義 4.10) より，$I = [a, b]$ で有界である．従って，$x \in I$ のとき常に $|f(x)| \leqq M$ なる $M \geqq 0$ が存在し，$x, x' \in I$ のとき常に

$$|f(x') - f(x)| \leqq 2M \tag{5.44}$$

が成り立つ．

不連続点が一つある場合を考えれば，二つ以上の場合も同様な証明を追加していけばよいので，不連続点が一つの場合を考える．そこで，$f(x)$ は $a < c < b$ なる一つの不連続点 $c$ を除いて連続であるとする．

任意の正の数 $\varepsilon$ に対して，$\delta_1 = \min\left\{c-a, b-c, \frac{\varepsilon}{2M}\right\}$ と定める．$I = [a, b]$ の分割を $P$ とする．次に $I' = \left[a, c - \frac{\delta_1}{2}\right]$, $I'' = \left[c - \frac{\delta_1}{2}, c + \frac{\delta_1}{2}\right]$, $I''' = \left[c + \frac{\delta_1}{2}, b\right]$ とおき，それぞれの分割を $P', P'', P'''$ とする．定理 4.3 より，区間 $I' = \left[a, c - \frac{\delta_1}{2}\right]$ 上と区間 $I''' = \left[c + \frac{\delta_1}{2}, b\right]$ 上で $f(x)$ は一様連続であるから，任意の正の数 $\varepsilon$ に対して，$x, x'$ に依存せずある正の数 $\delta(\leqq \delta_1)$ が定まり，$I'$ か $I'''$ のどちらかに属する二点 $x, x'$ が $|x' - x| < \delta$ を満たせば常に $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$ となる．まず，区間 $I' = \left[a, c - \frac{\delta_1}{2}\right]$ について考える．$I'$ の分割 $P'$ の幅 $d(P') = \max\limits_{1\leqq i\leqq n}(\alpha_i - \alpha_{i-1})$ は $\delta$ より小さいものとする．分割 $P' = \{\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n\}(a = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_{n-1} < \alpha_n = c - \frac{\delta_1}{2})$ の各部分閉区間 $[\alpha_{i-1}, \alpha_i]$ で $f(x)$ は連続だから Weierstrass の最大値最小値存在定理 (定理 4.2) より，部分閉区間 $[\alpha_{i-1}, \alpha_i]$ に属する二点 $x_i, x'_i$ で

$$f(x_i) = m_i(f; P') = \inf_{\alpha_{i-1}\leqq x\leqq\alpha_i} f(x), \quad f(x'_i) = M_i(f; P') = \sup_{\alpha_{i-1}\leqq x\leqq\alpha_i} f(x) \tag{5.45}$$

となるものがある．幅 $d(P') = \max\limits_{1\leqq i\leqq n}(\alpha_i - \alpha_{i-1}) < \delta$ だから，$|x'_i - x_i| < \delta$ となるので $f(x'_i) - f(x_i) < \varepsilon$ である．よって定義 5.1 より

$$\begin{aligned}
&S\left(f\middle|\left[a, c - \frac{\delta_1}{2}\right]; P'\right) - s\left(f\middle|\left[a, c - \frac{\delta_1}{2}\right]; P'\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} M_i(f; P')(\alpha_i - \alpha_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i(f; P')(\alpha_i - \alpha_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \{M_i(f; P') - m_i(f; P')\}(\alpha_i - \alpha_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \{f(x'_i) - f(x_i)\}(\alpha_i - \alpha_{i-1})
\end{aligned}$$

$$< \sum_{i=1}^{n} \varepsilon(\alpha_i - \alpha_{i-1}) = \varepsilon\left(c - a - \frac{\delta_1}{2}\right) < \varepsilon(c-a) \tag{5.46}$$

となる．区間 $I''' = \left[c + \frac{\delta_1}{2}, b\right]$ に対しても同様にして

$$S\left(f\Big|\left[c+\frac{\delta_1}{2}, b\right]; P'\right) - s\left(f\Big|\left[c+\frac{\delta_1}{2}, b\right]; P'\right) < \varepsilon\left(b - c - \frac{\delta_1}{2}\right) < \varepsilon(b-c) \tag{5.47}$$

が得られる．

次に $I'' = \left[c - \frac{\delta_1}{2}, c + \frac{\delta_1}{2}\right]$ の分割 $P'' = \{d_0, d_1, \cdots, d_n\}$ $(c - \frac{\delta_1}{2} = d_0 < d_1 < \cdots < d_{n-1} < d_n = c + \frac{\delta_1}{2})$ で幅 $d(P'') = \max\limits_{1 \leqq i \leqq n}(d_i - d_{i-1}) = \delta' \leqq \delta_1$ となるものを考える．区分的に連続であることの定義 (定義 4.10) より，不連続点 $c$ に対して右極限 $f(c+0)$ と左極限 $f(c-0)$ が存在するから $f(x)$ は区間 $I'' = \left[c - \frac{\delta_1}{2}, c + \frac{\delta_1}{2}\right]$ でも有界である．よって命題 2.1 よりこの区間で $f(x)$ のとる値の集合には上限と下限が存在する．即ち，部分閉区間 $[d_{i-1}, d_i] (1 \leqq i \leqq n)$ に属する二点 $x_i, x_i'$ で

$$f(x_i) = m_i\left(f\Big|\left[c-\frac{\delta_1}{2}, c+\frac{\delta_1}{2}\right]; P''\right) = \inf_{d_{i-1} \leqq x \leqq d_i} f(x) \tag{5.48}$$

$$f(x_i') = M_i\left(f\Big|\left[c-\frac{\delta_1}{2}, c+\frac{\delta_1}{2}\right]; P''\right) = \sup_{d_{i-1} \leqq x \leqq d_i} f(x) \tag{5.49}$$

となるものが存在する．(5.44) より $f(x_i') - f(x_i) \leqq 2M$ だから

$$\begin{aligned}
&S\left(f\Big|\left[c-\frac{\delta_1}{2}, c+\frac{\delta_1}{2}\right]; P''\right) - s\left(f\Big|\left[c-\frac{\delta_1}{2}, c+\frac{\delta_1}{2}\right]; P''\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} M_i(f; P'')(d_i - d_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i(f; P'')(d_i - d_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \{M_i(f; P'') - m_i(f; P'')\}(d_i - d_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \{f(x_i') - f(x_i)\}(d_i - d_{i-1}) \\
&\leqq \sum_{i=1}^{n} 2M(d_i - d_{i-1}) = 2M \sum_{i=1}^{n}(d_i - d_{i-1}) \\
&= 2M\delta_1 \leqq 2M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon
\end{aligned} \tag{5.50}$$

(5.46),(5.47) 及び (5.50) より

$$0 \leqq S(f; P) - s(f; P) < \varepsilon(c-a) + \varepsilon + \varepsilon(b-c) = (1+b-a)\varepsilon \tag{5.51}$$

となる．ここで $\varepsilon$ は任意の正の数だから $S(f) = s(f)$ となるので積分可能であることが示された．　**(証明終わり)**

## 5.7　不定積分

【定義 5.7】不定積分

$f(x)$ は区間 $I$ で（閉でも開でもよい）で連続であるとする．区間内の一点 $c \in I$ を積分の下端として固定し，上端 $x$ を変数として

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt, \quad x \in I \tag{5.52}$$

とおけば，$F(x)$ は $I$ で定義された関数になる．$F(x)$ を $f(x)$ の不定積分という．

## 5.8　広義積分

【定義 5.8】広義積分

関数 $f(x)$ が開区間 $(a, b)$ で連続であり，積分区間の端点 $x = a$ または $x = b$ で有界でない，あるいは双方で有界でない場合には，それぞれ広義積分を

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx, \quad \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx, \quad \lim_{\varepsilon, \varepsilon' \to +0} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon'} f(x)dx \tag{5.53}$$

で定義する．これらが存在するとき，通常の積分と同様 $\int_a^b f(x)dx$ で表し，広義積分 $\int_a^b f(x)dx$ は収束するという．また $f(x)$ が非有界となる点を特異点という．

同様に，区間 $(-\infty, b], [a, \infty), (-\infty, \infty)$ で連続な $f(x)$ に対して，それぞれ

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx \tag{5.54}$$

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)dx \tag{5.55}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty, b \to \infty} \int_a^b f(x)dx \tag{5.56}$$

と定義し，その極限が存在するとき，広義積分（無限積分）は収束するという．

また，$f(x)$ が $(a, b)$ 上の特異点 $c$ を除いて $[a, b]$ で

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon' \to +0} \int_{c+\varepsilon'}^{b} f(x)dx \tag{5.57}$$

と定義し，右辺の二つの広義積分がともに存在するとき，広義積分 $\int_a^b f(x)dx$ は収束するという．

【定理 5.3】

$x \geqq a$ で定義された区分的に連続な関数 $f(x)$ について，無限区間の定積分（無限積分）を次式で定義する．

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{\beta\to\infty}\int_a^\beta f(x)dx \tag{5.58}$$

これが収束するための必要十分条件は，任意の正の数 $\varepsilon$ に対して，ある正の数 $R$ が存在し，$R < x_1 < x_2$ なる任意の $x_1, x_2$ に対して

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right| < \varepsilon \tag{5.59}$$

が成り立つことである．

**(証明)**

区分的に連続であることの定義（定義 4.10）より，不連続点の数は有限個である．よって，全ての不連続点が有界閉区間 $[a, b]$ に属するような $b$ が存在する．ただし，$b$ は不連続点ではないものとする．この $b$ を用いて

$$\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^\infty f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \lim_{\beta\to\infty}\int_b^\beta f(x)dx \tag{5.60}$$

となる．定理 5.2 より，右辺第一項は積分可能であるから，第二項について考えればよい．

$$F(x) = \int_b^x f(t)dt \quad (x \geqq b) \tag{5.61}$$

とおく．任意の正の数 $\varepsilon$ に対して，$R = |b| + \frac{1}{\varepsilon}$ と定めると，$R < x_1 < x_2$ のとき $b < x_1 < x_2$ となる．よって，仮定と命題 5.2 より

$$\begin{aligned}\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right| &= \left|\int_{x_1}^{b} f(x)dx + \int_b^{x_2} f(x)dx\right| \\ &= \left|-\int_b^{x_1} f(x)dx + \int_b^{x_2} f(x)dx\right| \\ &= |F(x_2) - F(x_1)| < \varepsilon \end{aligned} \tag{5.62}$$

であるが，これは Cauchy の収束条件（定理 4.1）より

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{\beta\to\infty}\int_b^\beta f(x)dx = \int_b^\infty f(x)dx \tag{5.63}$$

が収束するための必要十分条件であるから示された． **(証明終わり)**

## 5.9 絶対収束と絶対積分可能

【定理 5.4】絶対収束と絶対積分可能に関する定理

$x \geqq a$ で定義された区分的に連続な関数 $f(x)$ について，$\displaystyle\int_a^\infty |f(x)|dx$ が収束すれば，$\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ も収束する．このとき $f(x)$ は絶対積分可能または絶対可積分であるといい，$\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ は絶対収束するという．

**(証明)**

区分的に連続であることの定義（定義 4.10）より，不連続点の数は有限個である．よって，全ての不連続点が有界閉区間 $[a,b]$ に属するような $b$ が存在する．ただし，$b$ は不連続点ではないものとする．この $b$ を用いて

$$\int_a^\infty |f(x)|dx = \int_a^b |f(x)|dx + \int_b^\infty |f(x)|dx \tag{5.64}$$

となる．仮定より，左辺の $\displaystyle\int_a^\infty |f(x)|dx$ は収束し，右辺第一項も定理 5.2 より積分可能である．よって右辺第二項も収束する．従って，

$$F(x) = \int_b^x |f(x)|dx \tag{5.65}$$

とおくと，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} F(x)$ は収束するから，Cauchy の収束条件より，任意の正の数 $\varepsilon$ に対して，ある正の数 $R(> b)$ が存在し，$x_2 > x_1 > R$ のとき（$x_2 > x_1$ としても一般性は失われない）．

$$|F(x_2) - F(x_1)| < \varepsilon \tag{5.66}$$

が成り立つ．これと命題 5.2 より

$$\begin{aligned}
|F(x_2) - F(x_1)| &= \left| -\int_b^{x_1} |f(x)|dx + \int_b^{x_2} |f(x)|dx \right| \\
&= \left| \int_{x_1}^b |f(x)|dx + \int_b^{x_2} |f(x)|dx \right| \\
&= \left| \int_{x_1}^{x_2} |f(x)|dx \right| < \varepsilon
\end{aligned} \tag{5.67}$$

ところが

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \right| \leqq \left| \int_{x_1}^{x_2} |f(x)|dx \right| < \varepsilon \tag{5.68}$$

であるから，定理 5.3 より示された． **(証明終わり)**

【命題 5.4】

$x \geqq a$ で定義された区分的に連続な関数 $f(x), g(x)$ が，$x \geqq a$ なる全ての $x$ に対して $0 \leqq f(x) \leqq g(x)$ であるとき，$\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ が収束すれば，$\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ も収束する．

**(証明)**

数列 $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ を単調増加で，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ となり，全ての自然数 $n$ に対して，$b_n \geqq a$ となる任意の数列とする．このとき

$$B_n = \int_a^{b_n} f(x)dx \tag{5.69}$$

とおくと，$\{b_n\}$ は単調増加で，$f(x) \geqq 0 (x \geqq a)$ だから

$$B_n = \int_a^{b_n} f(x)dx \leqq \int_a^{b_{n+1}} f(x)dx = B_{n+1} \tag{5.70}$$

となるから $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ は単調増加である．また，$x \geqq a$ で $0 \leqq f(x) \leqq g(x)$ だから，命題 5.3 より

$$B_n = \int_a^{b_n} f(x)dx \leqq \int_a^{b_n} g(x)dx \leqq \lim_{n\to\infty} \int_a^{b_n} g(x)dx = \int_a^{\infty} g(x)dx \tag{5.71}$$

となる．仮定より $\displaystyle\int_a^{\infty} g(x)dx$ が収束するから，$\{B_n\}$ は上に有界となる．以上より，$\{B_n\}$ は単調増加でかつ上に有界となる．よって，定理 3.2 より

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^{b_n} f(x)dx = \int_a^{\infty} f(x)dx \tag{5.72}$$

は収束する． **(証明終わり)**

## 5.10 微分

【定義 5.8】微分

関数 $f(x)$ は開区間 $I = (c, d)$ で定義されているとし，$a \in I$ とする．極限

$$\lim_{h\to 0} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{5.73}$$

が存在するとき，$f(x)$ は $a$ で微分可能であるといい，(5.73) の極限値を $f'(a)$ と書いて，$f(x)$ の $a$ における微分係数または微分商という．$f(x)$ が $I$ の全ての点で微分可能であるとき，$f(x)$ は $I$ で微分可能であるという．そのとき，$x$ における微分係数 $f'(x)$ は $I$ で定義された $x$ の関数になる．$f'(x)$ を $f(x)$ の導関数という．

$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を表すのに $\dfrac{d}{dx}f(x)$ という記号も用いる．あるいは，$y = f(x)$ として $\dfrac{dy}{dx}$ と書くこともある．

## 5.11 原始関数

【定義 5.9】原始関数

関数 $f(x)$ は区間 $I$ で定義されているとする．$I$ で微分可能な関数 $F(x)$ で，任意の $x \in I$ において $F'(x) = f(x)$ を満たすものが存在するとき，$F(x)$ を $I$ における $f(x)$ の原始関数という．

【命題 5.5】

関数 $f(x), g(x)$ が区間 $I$ 上で微分可能であれば，$I$ 上で

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g(x)' \tag{5.74}$$

が成り立つ．

**(証明)**

$$\begin{aligned}
\{f(x)g(x)\}' &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}g(x+h)}{h}+\frac{f(x)\{g(x+h)-g(x)\}}{h} \\
&= f'(x)g(x)+f(x)g'(x)
\end{aligned} \tag{5.75}$$

**(証明終わり)**

【定理 5.5】

関数 $f(x)$ は区間 $I$ で連続とであるとする．区間内の一点 $a \in I$ を積分の下端とし，上端 $x$ を変数として

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx, \quad x \in I \tag{5.76}$$

とおくと，$F(x)$ は $I$ で微分可能であって

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(x)dx = f(x), \quad x \in I \tag{5.77}$$

となる．即ち，$F(x)$ は $f(x)$ の原始関数となる．

**(証明)**

命題 5.2 より

$$\begin{aligned}
F(x+h)-F(x) &= \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\
&= \int_x^a f(t)dt + \int_a^{x+h} f(t)dt \\
&= \int_x^{x+h} f(t)dt
\end{aligned} \tag{5.78}$$

となる．$t = x$ において $f(t)$ は連続だから，任意の正の数 $\varepsilon$ に対して，ある正の数 $\delta$ が定まり，

$$|t-x| < \delta \Rightarrow f(x)-\varepsilon < f(t) < f(x)+\varepsilon \tag{5.79}$$

が成り立つ．よって，$\delta = \varepsilon$ と定め $0 < |h| < \delta$ とすると，命題 5.3 より，$h > 0$ のときは

$$\{f(x)-\varepsilon\}\int_x^{x+h}dt < \int_x^{x+h}f(t)dt = F(x+h)-F(x) < \{f(x)+\varepsilon\}\int_x^{x+h}dt$$
$$\therefore \{f(x)-\varepsilon\}h < F(x+h)-F(x) < \{f(x)+\varepsilon\}h$$
$$\therefore f(x)-\varepsilon < \frac{F(x+h)-F(x)}{h} < f(x)+\varepsilon \quad (\because h>0)$$
$$\therefore \left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)\right| < \varepsilon \tag{5.80}$$

となる．$h<0$ のときは

$$\{f(x)-\varepsilon\}\int_{x+h}^{x}dt < \int_{x+h}^{x}f(t)dt = F(x)-F(x+h) < \{f(x)+\varepsilon\}\int_{x+h}^{x}dt$$
$$\therefore \{f(x)-\varepsilon\}(-h) < F(x)-F(x+h) < \{f(x)+\varepsilon\}(-h)$$
$$\therefore f(x)-\varepsilon < \frac{F(x)-F(x+h)}{-h} < f(x)+\varepsilon \quad (\because h<0)$$
$$\therefore f(x)-\varepsilon < \frac{F(x+h)-F(x)}{h} < f(x)+\varepsilon$$
$$\therefore \left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)\right| < \varepsilon \tag{5.81}$$

となる．よって，(5.80) と (5.81) より $h$ の正負に関わらず，任意の正の数 $\varepsilon$ に対して

$$\therefore \left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)\right| < \varepsilon \tag{5.82}$$

が成り立つ．$0<|h|<\delta=\varepsilon$ としたから，$\varepsilon\to 0$ としたとき

$$\therefore \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \to f(x) \quad (h\to 0) \tag{5.83}$$

となる．これは $F(x)$ が微分可能で，$F'(x)=f(x)$ であることを示している．

(証明終わり)

## 5.12　部分積分法

【命題 5.6】部分積分法

関数 $f(x), g(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で微分可能で，$f'(x), g'(x)$ が $[a,b]$ で連続であるとき，

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx \tag{5.84}$$

が成り立つ．

**(証明)**

積の微分公式（命題 5.5）より

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$
$$\therefore \quad f(x)g'(x) = \{f(x)g(x)\}' - f'(x)g(x) \tag{5.85}$$

である．仮定より，$f'(x)g(x), f(x)g'(x)$ は $[a,b]$ で連続となるから，$\{f(x)g(x)\}'$ も $[a,b]$ で連続である．定理 5.1 より，有界閉区間上で連続な関数はこの区間上で積分可能であるから，(5.85) の両辺を $[a,b]$ 上で積分することにより示される．　(証明終わり)

# 6 Laplace(ラプラス) 変換

【定義 6.1】Laplace 変換

実変数 $t$ に対して，実数値関数 $f(t)$ は $t \geqq 0$ で定義されていて，この区間の任意の有限な区間で積分可能とする．このとき，$s$ を複素数とし，広義積分（無限積分）

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt = \lim_{\beta\to\infty}\int_0^{\beta} e^{-st} f(t)dt \tag{6.1}$$

が収束するとき，

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt \tag{6.2}$$

とおく．このとき $s$ の関数 $F(s)$ を $f(t)$ の Laplace 変換または Laplace 積分といい，$\mathcal{L}\{f(t)\}$ と表す.

$f(t)$ が $t > 0$ で定義されていて，$t = 0$ で定義されていない場合もあるが，そのような場合は $f(0)$ の値を適当に定めて，$t \geqq 0$ 定義しているものとしたほうが便利である．本稿の定理 5.3 において，$t \geqq a$ で定義された区分的に連続な関数について，無限区間の定積分を定義し，その集束条件を示したのはこのためである.

【定理 6.1】

関数 $f(t)$ が $t \geqq 0$ で区分的に連続ならば

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt \tag{6.3}$$

は Re $s > 0$ なる[6]複素数 $s$ について存在する.

**(証明)**

仮定より，$f(x)$ は $t \geqq 0$ で区分的に連続であるから有界である．よって，ある $M(\geqq 0)$ が存在して

$$|f(t)| \leqq M \quad (t \geqq 0) \tag{6.4}$$

が成り立つ．$s = \lambda + i\mu(\lambda, \mu$は実数$)$ とすると，このとき仮定より Re $s = \lambda > 0$ である．$x_2 > x_1 > x$ なる $x_2, x_1, x$ を任意にとると

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} e^{-st} f(t)dt\right| \leqq \left|\int_{x_1}^{x_2} |e^{-st} f(t)|dt\right| = \int_{x_1}^{x_2} |e^{-st} f(t)|dt \tag{6.5}$$

であり，$|e^{-i\mu t}| = |\cos\mu t - i\sin\mu t| = 1$ だから

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_2} |e^{-st} f(t)|dt &= \int_{x_1}^{x_2} |e^{-i\mu t}e^{-\lambda t} f(t)|dt \\ &= \int_{x_1}^{x_2} |e^{-i\mu t}||e^{-\lambda t} f(t)|dt \\ &= \int_{x_1}^{x_2} |e^{-\lambda t} f(t)|dt \\ &= \int_{x_1}^{x_2} e^{-\lambda t}|f(t)|dt \end{aligned} \tag{6.6}$$

[6] Re $s$ は複素数 $s$ の実部を表す．例えば，Re $(3 + 2i) = 3$.

となる．(6.4) と (6.6) より

$$\int_{x_1}^{x_2} |e^{-st}f(t)|dt = \int_{x_1}^{x_2} e^{-\lambda t}|f(t)|dt \leqq \int_{x_1}^{x_2} e^{-\lambda t}Mdt = M\int_{x_1}^{x_2} e^{-\lambda t}dt \tag{6.7}$$

となる．また，$x < x_1 < x_2$ としたから

$$\begin{aligned} M\int_{x_1}^{x_2} e^{-\lambda t}dt < M\int_{x}^{\infty} e^{-\lambda t}dt &= M\lim_{\beta\to\infty}\int_{x}^{\beta} e^{-\lambda t}dt \\ &= M\lim_{\beta\to\infty}\left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\right]_x^{\beta} \\ &= \frac{M}{\lambda}e^{-\lambda x} \end{aligned} \tag{6.8}$$

となる．よって，(6.5), (6.7) 及び (6.8) より

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} e^{-st}f(t)dt\right| < \frac{M}{\lambda}e^{-\lambda x} \tag{6.9}$$

となる．例 4.2 より $\lim_{x\to\infty} e^{-\lambda x} = 0$ だから，任意の正の数 $\varepsilon$ に対して，ある正の数 $R$ が定まり，$R < x < x_1 < x_2$ なる任意の $x, x_1, x_2$ に対して

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} e^{-st}f(t)dt\right| < \frac{M}{\lambda}e^{-\lambda x} \leqq \left|\frac{M}{\lambda}e^{-\lambda x}\right| < \varepsilon \tag{6.10}$$

が成り立つから，定理 5.3 より与えられた条件に対して $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt$ が収束することが示された．　　**(証明終わり)**

【定理 6.2】

関数 $f(t)$ は $t \geqq 0$ で区分的に連続であるとする．$f(t)$ の Laplace 変換 $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ が $s = s_0$ で収束すれば，$\mathrm{Re}\, s > \mathrm{Re}\, s_0$ なる任意の $s$ に対して $F(s)$ が存在する．

**(証明)**

区分的に連続であることの定義 (定義 4.10) より，不連続点の数は有限個である．よって，全ての不連続点が有界閉区間 $[0, b]$ に属するような $b(\geqq 0)$ が存在する．ただし，$b$ で不連続でないものとする．この $b$ を用いて

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt &= \int_0^{b} e^{-st}f(t)dt + \int_b^{\infty} e^{-st}f(t)dt \\ &= \int_0^{b} e^{-st}f(t)dt + \lim_{\beta\to\infty}\int_b^{\beta} e^{-st}f(t)dt \end{aligned} \tag{6.11}$$

となる．右辺第一項は定理 5.2 より積分可能であるから，右辺第二項が収束することを示せばよい．

$$\phi(t) = \int_b^{t} e^{-s_0 t}f(x)dx \tag{6.12}$$

とおくと，$\phi(b)=0$ で，与えられた条件より[7]

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\phi(t) &= \lim_{t\to\infty}\int_b^t e^{-s_0 t}f(x)dx \\ &= \lim_{t\to\infty}\left\{\int_0^t e^{-s_0 x}f(x)dx-\int_0^b e^{-s_0 x}f(x)dx\right\} \\ &= \lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-s_0 x}f(x)dx-\int_0^b e^{-s_0 x}f(x)dx \qquad (6.13)\end{aligned}$$

は収束する．よって命題 4.3 より $\phi(t)$ は $t\geqq 0$ で有界である．また，$b$ の定め方より，$\phi(t)$ と $\phi'(t)=e^{-s_0 t}f(t)$ は $t\geqq b$ で連続である．よって，次の部分積分が可能となる．

$$\begin{aligned}\int_b^t e^{-st}f(x)dx &= \int_b^t e^{-(s-s_0)x}e^{-s_0 x}f(x)dx \\ &= \int_b^t e^{-(s-s_0)x}\phi'(x)dx \\ &= \left[e^{-(s-s_0)x}\phi(x)\right]_b^t+(s-s_0)\int_b^t e^{-(s-s_0)x}\phi(x)dx \\ &= e^{-(s-s_0)t}\phi(t)+(s-s_0)\int_b^t e^{-(s-s_0)x}\phi(x)dx \quad (\because \phi(b)=0)\end{aligned}$$
$$(6.14)$$

ここで Re $(s-s_0)>0$ かつ $t\geqq 0$ で $\phi(t)$ は有界だから[8]

$$\lim_{t\to\infty}e^{-(s-s_0)t}\phi(t)=0 \qquad (6.15)$$

となる．更に，

$$\lim_{t\to\infty}\int_b^t e^{-(s-s_0)x}\phi(x)dx=\lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-(s-s_0)x}\phi(x)dx-\int_0^b e^{-(s-s_0)x}\phi(x)dx \qquad (6.16)$$

は Re $(s-s_0)>0$ だから定理 6.1 より右辺第一項は収束する．また，第二項は積分可能である．よって，(6.14), (6.15) 及び (6.16) より $\lim_{t\to\infty}\int_b^t e^{-sx}f(x)dx$ が収束し，次式右辺第二項も積分可能であるから

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-sx}f(x)dx=\lim_{t\to\infty}\int_b^t e^{-sx}f(x)dx-\int_0^b e^{-sx}f(x)dx \qquad (6.17)$$

も収束するので，Re $s>$ Re $s_0$ なる任意の $s$ に対して $F(s)$ が存在することが示された．

**(証明終わり)**

【定理 6.3】

---

[7] $s=s_0$ で収束すること

[8] $t\geqq 0$ で $\phi(t)$ は有界だから，ある $M\geqq 0$ が存在して，$|\phi(t)|\leqq M$ となる．よって

$$0\leqq\lim_{t\to\infty}|e^{(s-s_0)t}\phi(t)|=\lim_{t\to\infty}e^{(s-s_0)t}|\phi(t)|\leqq M\lim_{t\to\infty}e^{(s-s_0)t}=0 \quad (\because s-s_0>0)$$

関数 $f(t)$ は $t \geqq 0$ で区分的に連続であるとする．このとき，$f(t)$ に対し

$$|f(t)| \leqq Me^{\alpha t} \quad (t \geqq 0) \tag{6.18}$$

が成り立つような正の数 $\alpha$ と $M$ が存在するならば，$f(t)$ の Laplace 変換

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \tag{6.19}$$

は $\mathrm{Re}\, s > \alpha$ において収束する．

(証明)

$s = \lambda + i\mu (\lambda, \mu$は実数) とすると，このとき仮定より $\mathrm{Re}\, s = \lambda > \alpha$ である．

$$g(x) = \int_0^x |e^{-st} f(t)| dt \tag{6.20}$$

とすると

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} g(x) &= \lim_{x\to\infty} \int_0^x |e^{-st} f(t)| dt = \int_0^\infty |e^{-st} f(t)| dt = \int_0^\infty |e^{-\lambda t} e^{-i\mu t} f(t)| dt \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda t} |e^{-i\mu t}||f(t)| dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} |f(t)| dt \quad (\because |e^{-i\mu t}| = 1) \\
&\leqq \int_0^\infty e^{-\lambda t} M e^{\alpha t} dt = M \int_0^\infty e^{(\lambda-\alpha)t} dt = \frac{M}{\lambda - \alpha}
\end{aligned} \tag{6.21}$$

となる．よって，(6.20) と (6.21) より $g(x)$ は単調増加で上に有界であるから $x \to \infty$ のとき収束する．故に，定理 5.4 より $\displaystyle\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$ も収束するので示された．

(証明終わり)

【注】 定理 6.3 の条件を満たす関数を指数 $\alpha$ 位の関数という

【定理 6.4】

関数 $f(t)$ は $t \geqq 0$ で区分的に連続であるとする．$f(t)$ の Laplace 変換 $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ $s = s_0$ において絶対収束 (5.9 節参照) するならば $F(s)$ は $\mathrm{Re}\, s > \mathrm{Re}\, s_0$ なる $s$ に対して絶対収束する．

(証明)

$s_0 = \lambda_0 + i\mu_0, s = \lambda + i\mu$ とおく．更に $g_{s_0}(t)$ と $g_s(t)$ を次のように定める．

$$g_{s_0}(t) = |e^{s_0 t} f(t)| = |e^{-i\mu_0 t}|e^{-\lambda_0 t}|f(t)| = e^{-\lambda_0 t}|f(t)|$$

$$g_s(t) = |e^{st} f(t)| = |e^{-i\mu_t}|e^{-\lambda t}|f(t)| = e^{-\lambda t}|f(t)|$$

仮定より $\mu \geqq \mu_0$ だから $0 \leqq g_s(t) \leqq g_{s_0}(t)$ である．更に仮定より $\displaystyle\int_0^\infty g_{s_0}(t) dt = \int_0^\infty |e^{-s_0 t} f(t)| dt$ が収束するから，命題 5.4 より，$\displaystyle\int_0^\infty g_s(t) dt = \int_0^\infty |e^{-st} f(t)| dt$ も収束するので示された.

(証明終わり)

# 参考文献

[1] 高木貞治，解析概論 改訂第3版 軽装版，岩波書店，1983.（第一版:1938)

[2] 福田安蔵，鈴木七緒，安岡義則，黒崎千代子，詳解微積分演習 I，共立出版，1960.

[3] 一松　信，解析学序説　上巻　新版，裳華房，1981.（第一版:1962)

[4] 一松　信，解析学序説　下巻　新版，裳華房，1987.（第一版:1963)

[5] 外岡慶之助，井出三郎，山田正栄，中田　平，永井珠夫，大学演習　微分学コンパニオン，学術図書出版社，1965.

[6] 外岡慶之助，井出三郎，山田正栄，中田　平，中島甲臣，秋山隆二朗，大学演習　積分学コンパニオン，学術図書出版社，1967.

[7] 笠原 晧司，微分積分学　サイエンスライブラリ　数学12，サイエンス社，1974.

[8] 田島一郎，イプシロン-デルタ　数学ワンポイント双書20，共立出版，1978.

[9] 杉浦光夫，解析入門 I，東京大学出版会，1980.

[10] 田島一郎，解析入門　岩波全書325，岩波書店，1981.

[11] 杉浦光夫，清水英男，金子　晃，岡本和夫，解析入門演習，東京大学出版会，1989.

[12] 上村豊, 坪井堅二，微分積分学，開成出版，1999.

[13] 西山 享，基礎過程　微分積分 I　－1変数の微積分－，開成出版，1999.

[14] 黒田成俊，微分積分　共立講座21世紀の数学　第1巻，共立出版，2002.

[15] 宮島静雄，微分積分学 I　1変数の微分積分，共立出版，2003.

[16] 石橋幸男，理工学基礎 微分積分学，培風館，2003.

[17] 齋藤正彦，微分積分学，東京図書，2006.

Laplace変換に関する参考文献

[18] 林　五郎，Laplace變換論，河出書房，1948.

[19] 島村　敏，基礎ラプラス変換，コロナ社, 1965.

[20] 及川多喜雄，ラプラス変換概説　-入門から応用への道-，内田老鶴圃新社，1972.

[21] 田代嘉宏，ラプラス変換とフーリエ解析要論(第2版)，森北出版，2004.（第1版:1977)

[22] 川村雅恭，ラプラス変換と電気回路，昭晃堂, 1978.

[23] 大下眞二郎，詳解Laplace変換演習，共立出版, 1983.

[24] 樋口禎一，八高隆雄，フーリエ級数とラプラス変換の基礎・基本，牧野書店，2004(初版 2000).

[25] 原島博, 堀洋一，工学基礎 ラプラス変換と $z$ 変換，サイエンス社, 2004.

[26] 木村英紀，フーリエ-ラプラス解析，岩波書店, 2007.

[27] 水本哲弥，フーリエ級数・変換/ラプラス変換，オーム社, 2010. .

# 著者略歴

**上野公彦 (Kimihiko UENO)**

| | |
|---|---|
| 1992 年 | 北海道大学水産学部漁業学科卒業 |
| 1994 年 | 北海道大学大学院水産学研究科博士前期課程修了 |
| 1996 年 | 北海道大学大学院水産学研究科博士後期課程中途退学 |
| 1996 年 | 東京水産大学海洋生産学科助手 |
| 1997 年 | 博士（水産学：北海道大学） |
| 2003 年 | 東京海洋大学海洋科学部海洋環境学科助教授 |
| 2007 年 | 東京海洋大学海洋科学部海洋環境学科准教授<br>現在に至る |
| 研究対象： | 浮体の動揺運動方程式のパラメータ同定,<br>複雑系の観点からみた不規則波中における漁船の動揺解析,<br>船体動揺への自由水の影響に関する研究 |
| 所属学会： | 数理水産科学会，日本応用数理学会, システム制御情報学会,<br>電子情報通信学会，日本自然災害学会，数学教育学会，日本航海学会 |