# 振動と常微分方程式

上野公彦 †

# Oscillations and Ordinary Differential Equations

**Kimihiko Ueno†**

† 東京海洋大学:Tokyo University of Marine Science and Technology

## 1　緒言

振動を数学的に記述する場合において，微分方程式は必要不可欠なものである．筆者の専門である 1 自由度船体横揺れ運動は，2 階常微分方程式で表されることが多い．今日では数式処理ソフトを使えば，本稿で扱ったような微分方程式は容易に解ける．しかし，筆者は数式処理ソフトをブラックボックスとして用いられることを危惧している．理論を理解し，演習問題を多数解き解法を習熟した者が確認のために数式処理ソフトを用いることは許容されるが，そうでない者が用いると危険な場合がある．代表的な常微分方程式の数値解法であるルンゲ・クッタ法のプログラムをコンピュータ言語を用いて書いた場合，解析解が既知である線形な微分方程式の解と比較検証する必要がある．このような場合，微分方程式の理論と解法に関する知識が重要となる．

本稿で扱ったのは，主に 1 自由度 2 階線形常微分方程式で表される振動現象である．実現象の多くは非線形な微分方程式を用いないと表せないが，本稿では，理論的な理解を深める入門用として線形な微分方程式と対応する振動現象について述べた．線形理論を学ばずして非線形理論を理解することは不可能である．本稿では，いきなり 2 階線形常微分方程式を扱うのでなく，1 階線形常微分方程式の解法から説明を始めた．これは，2 階線形常微分方程式の解法を説明するうえで必要となるためである．1 自由度 2 階線形常微分方程式に対して「定数変化法」,「ラプラス変換」および「未定係数法」に基づいた解法を主に詳述した．

## 2　1 階常微分方程式

### 2.1　変数分離形

未知関数 $x(t)$ の導関数が

$$\frac{dx}{dt} = P(t)Q(x) \tag{2.1}$$

という形の微分方程式を変数分離形という．

【解法】

$Q(x) \neq 0$ の場合 (2.1) より

$$\frac{1}{Q(x)}\frac{dx}{dt} = P(t) \tag{2.2}$$

ここで，合成関数の微分法によって

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int \frac{1}{Q(x)}dx &= \frac{d}{dx}\int \frac{1}{Q(x)}dx\frac{dx}{dt} \\ &= \frac{1}{Q(x)}\frac{dx}{dt} = P(t) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dt}\int \frac{1}{Q(x)}dx = P(t) \tag{2.3}$$

$$\int \frac{1}{Q(x)}dx = \int P(t)dt + C \quad (C\text{ は任意定数}) \tag{2.4}$$

また $Q(b) = 0$ となる定数 $b$ が存在すれば，定数関数 $x = b$ も (2.1) の解である．

### 2.1.1　【例】

$$\frac{dx}{dt} = ax$$

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = a$$

$$\int \frac{1}{x}dx = a\int dt$$

$$\log|x| = at + C \quad (C\text{ は任意定数})$$

$$x = \pm e^{at+C} = \pm e^{C}e^{at}$$

$$C_1 = \pm e^{C}$$

$x = 0$ も解であるので $x = C_2e^{at}$ とし，$C_2 = 0$ の場合もあるとする．

$$x = C_1e^{at}$$

## 2.2　1 階線形微分方程式

方程式が未知関数について，1 次式になっているもの，すなわち，各項に未知関数が高々一つしか含まれないもの（次式参照）である．

$$\frac{dx}{dt} + P(t)x = Q(t) \tag{$*$}$$

### 2.2.1　積分因子を用いた解法

($*$) の両辺に $e^{\int p(t)dt}$ をかけると左辺を微分した形

$$\left(\frac{dx}{dt} + P(t)x\right) e^{\int P(t)xdt} = \frac{d}{dt}\left(xe^{\int P(t)dt}\right) \tag{2.5}$$

に変形できるので，そのまま両辺が積分でき，

$$xe^{\int P(t)dt} = \int Q(t)e^{\int P(t)dt}dt \tag{2.6}$$

よって

$$x = e^{-\int P(t)}dt\left(\int Q(t)e^{\int P(t)dt}dt + C\right) \tag{2.7}$$

$C$ は任意定数.

【例】積分因子を用いた解法

$$\frac{dx}{dt} - 2x = e^t$$

$P(t) = -2, Q(t) = e^t$ であるから

$$\int P(t) = -2t + K \quad (K : \text{任意定数})$$

$K = 0$ として $\int P(t)dt = -2t$

$$xe^{\int P(t)dt} = \int Q(t)e^{\int P(t)dt}dt + C \quad (C : \text{任意定数})$$

$$\begin{aligned} xe^{-2t} &= \int (e^t)(e^{-2t})dt + C \\ &= -e^{-t} + C \end{aligned}$$

よって

$$x = -e^t + Ce^{2t}$$

### 2.2.2　定数変化法

$$\frac{dx}{dt} + P(t)x = Q(t) \tag{$*$}$$

( ∗ ) に対して $Q(t) = 0$(同次) の，すなわち

$$\frac{dx}{dt} + P(t)x = 0$$

を考える．これは変数分離形だから, 一般解は

$$x = Ae^{-\int P(t)dt} \tag{2.8}$$

となる. 次に $Q(t) \neq 0$(非同次) の場合を考える．$Q(t) = 0$ のときは，$A$ は定数でよかったが，一般の $Q(t)$ は $t$ の値よって変化する．そこで，$A$ を $t$ の関数と考えて，(*) の解を

$$x = A(t)e^{-\int P(t)dt} \tag{2.9}$$

とおく，このとき

$$\begin{aligned} x' &= A'(t)e^{-\int P(t)dt} + A(t)\frac{d}{dt}e^{-\int P(t)dt} \\ &= A'(t)e^{-\int P(t)dt} + A(t)e^{-\int P(t)dt}\{-P(t)\} \\ &= A'(t)e^{-\int P(t)dt} - A(t)P(t)e^{-\int P(t)dt} \end{aligned} \tag{2.10}$$

これらの $x, x'$ を与えられた微分方程式 ( ∗ ) に代入すると

$$A'(t)e^{-\int P(t)dt} - A(t)P(t)e^{-\int P(t)dt} + A(t)P(t)e^{-\int P(t)dt} = Q(t) \tag{2.11}$$

よって

$$A'(t)e^{-\int P(t)dt} = Q(t) \tag{2.12}$$

よって

$$A'(t) = Q(t)e^{\int P(t)dt} \tag{2.13}$$

よって

$$A(t) = \int Q(t)e^{\int P(t)dt}dt + C \quad (C : \text{任意定数}) \tag{2.14}$$

これを (2.9) へ代入して，求める微分方程式 (＊) の階は

$$x = e^{-\int P(t)dt}\left(\int Q(t)e^{\int P(t)dt}dt + C\right) \tag{2.15}$$

【例】定数変化法

$$\frac{dx}{dt} - 2x = e^t \tag{1}$$

$$\frac{dx}{dt} - 2x = 0$$

の解は $x = Ae^{2t}$ であるから

$$x = A(t)e^{2t} \tag{2}$$

とおく．

$$x'(t) = A'(t)e^{2t} + 2A(t) \tag{3}$$

(2) と (3) を (1) へ代入して

$$A'(t)e^{2t} + 2A(t)e^{2t} - 2A(t)e^{2t} = e^t$$

よって

$$A'(t) = e^{-t}$$

よって

$$A(t) = -e^{-t} + C \quad (C : \text{任意定数}) \tag{4}$$

(2) と (4) より

$$x(t) = (-e^{-t} + C)e^{2t} = -e^t + Ce^{2t}$$

### 2.2.3　解を分離する解法

$$\frac{dx}{dt} + P(t)x = Q(t) \tag{＊}$$

この解法は類書ではあまり見かけないが，筆者が北大の 2 年生のとき，定数変化法と同時に習ったのを記憶している [24]．

$$x(t) = u(t)v(t) \tag{2.16}$$

とおく．$u$ と $v$ は $t$ の関数である．以下，$x = uv$ と記す．

$$\frac{dx}{dt}=\frac{du}{dt}v+u\frac{dv}{dt} \tag{2.17}$$

(2.17) を (∗) へ代入して整理すると

$$\frac{du}{dt}v+u\left(\frac{dv}{dt}+P(t)v\right)=Q(t) \tag{2.18}$$

ここで $v=v(t)$ を

$$\frac{dv}{dt}+P(t)v=0 \tag{2.19}$$

なるように選べば

$$\frac{du}{dt}=\frac{Q(t)}{v} \tag{2.20}$$

となる．(2.20) の両辺を $t$ で積分して

$$u=\int\frac{Q(t)}{v}dt+C_1 \quad (C_1:\text{任意定数}) \tag{2.21}$$

(2.21) によって関数 $u=u(t)$ を求めると $x(t)=u(t)v(t)$ が与えられた微分方程式 (∗) の解となる．(2.19）より

$$v=C_2e^{-\int P(t)dt} \quad (C_2:\text{任意定数}) \tag{2.22}$$

(2.21) と (2.22) より

$$\begin{aligned} x(t) &= u(t)v(t)=\left(\int\frac{Q(t)}{v(t)}+C_1\right)C_2e^{-\int P(t)dt} \\ &= e^{-\int P(t)dt}\left(\int\frac{Q(t)e^{\int P(t)dt}}{C_2}dt+C_1\right)C_2 \\ &= e^{-\int P(t)dt}\left(\int Q(t)e^{\int P(t)dt}dt+C\right) \quad (C=C_1C_2) \end{aligned} \tag{2.23}$$

【例】解を分離する方法

$$\frac{dx}{dt}-2x=e^t \tag{1}$$

$$x=uv \tag{2}$$

とおくと

$$\frac{dx}{dT} = \frac{du}{dt}v + u\frac{dv}{dt} \tag{3}$$

(1) と (3) より

$$\frac{du}{dt}v + u\frac{dv}{dt} - 2uv = e^t$$

よって

$$\frac{du}{dt}v + u\left(\frac{dv}{dt} - 2v\right) = e^t \tag{4}$$

$\frac{dv}{dt} - 2v = 0$ となる $v$ を選ぶと

$$v = C_1 e^{2t} \quad (C_1 : \text{任意定数}) \tag{5}$$

(4) と (5) より

$$C_1 e^{2t}\frac{du}{dt} = e^t$$

よって

$$u = -\frac{1}{C_1}e^{-t} \quad (C_2 : \text{任意定数}) \tag{6}$$

(2) と (5) と (6) より

$$x = uv = \left(C_1 e^{2t}\right)\left(-\frac{1}{C_1}e^{-t} + C_2\right) = -e^t + Ce^{2t} \quad (C = C_1 C_2)$$

# 3　2 階線形微分方程式

## 3.1　定数係数 2 階線形同次微分方程式

次の微分方程式について考える.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = 0 \tag{3.1}$$

(3.1) の特性方程式

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \tag{3.2}$$

の解を $\alpha, \beta$ とすると，解と係数の関係より

$$b = -(\alpha + \beta), \quad c = \alpha\beta \tag{3.3}$$

であるから，(3.1) は次のように表せる．

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (\alpha + \beta)\frac{dx}{dt} + \alpha\beta x = 0 \tag{3.4}$$

(3.4) を次のように変形する．

$$\left(\frac{d}{dt} - \alpha\right)\left(\frac{d}{dt} - \beta\right)x = 0 \tag{3.5}$$

ここで

$$y = \left(\frac{d}{dt} - \beta\right)x = \frac{dx}{dt} - \beta x \tag{3.6}$$

とおくと (3.5) は

$$\left(\frac{d}{dt} - \alpha\right)y = 0 \tag{3.7}$$

となり，$\frac{dy}{dt} = \alpha y$ であるから

$$y = C_1 e^{\alpha t} \quad (C_1 : \text{任意定数}) \tag{3.8}$$

(3.6) と (3.8) より

$$\frac{dx}{dt} - \beta x = C_1 e^{\alpha t} \tag{3.9}$$

となる．これは 1 階線形微分方程式である．$\frac{dx}{dt} - \beta x = 0$ の解は $x = Ae^{\beta x} \quad (A : \text{任意定数})$ であるから

$$x = A(t)e^{\beta t} \tag{3.10}$$

とおいて (3.9) に代入すると

$$A'(t)e^{\beta t} + \beta A(t)e^{\beta t} - \beta A(t)e^{\beta t} = C_1 e^{\alpha t}$$

よって

$$A'(t)e^{\beta t} = C_1 e^{\alpha t}$$

よって

$$A'(t) = C_1 e^{(\alpha-\beta)t} \tag{3.11}$$

(i) $\alpha \neq \beta$ の場合

$$A(t) = \frac{C_1}{(\alpha-\beta)} e^{(\alpha-\beta)t} + C_2 \quad (C_2 : \text{任意定数}) \tag{3.12}$$

$$x(t) = A(t)e^{\beta t} = \frac{C_1}{\alpha-\beta} e^{\alpha t} + C_2 e^{\beta t} = B_1 e^{\alpha t} + B_2 e^{\beta t} \tag{3.13}$$

ここで $B_1 = \frac{C_1}{\alpha-\beta}, B_2 = C_2$.

特に $\alpha = \gamma + i\omega, \beta = \gamma - i\omega (\omega \neq 0)$ の場合

$$\begin{aligned} x(t) &= B_1 e^{(\gamma+i\omega)t} + B_2 e^{(\gamma-i\omega)t} \\ &= B_1 e^{\gamma t}(\cos\omega t + i\sin\omega t) + B_2 e^{\gamma t}(\cos\omega t - i\sin\omega t) \\ &= e^{\gamma t}\{(B_1+B_2)\cos\omega t + i(B_1-B_2)\sin\omega t\} \end{aligned} \tag{3.14}$$

$B_1$ と $B_2$ が複素共役のとき $x(t)$ は実数値関数となる．$B_1 + B_2 = K_1, B_1 - B_2 = iK_2$

$$B_1 = \frac{K_1 - iK_2}{2}, \quad B_2 = \frac{K_1 + iK_2}{2} \tag{3.15}$$

となるから

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\gamma t}(K_1\cos\omega t + K_2\sin\omega t) \\ &= e^{\gamma t}\sqrt{K_1^2+K_2^2}\left(\frac{K_1}{\sqrt{K_1^2+K_2^2}}\cos\omega t + \frac{K_2}{\sqrt{K_1^2+K_2^2}}\sin\omega t\right) \end{aligned} \tag{3.16}$$

ここで，$\frac{K_1}{\sqrt{K_1^2+K_2^2}} = \cos\delta$，$\frac{K_2}{\sqrt{K_1^2+K_2^2}} = -\sin\delta$，$\sqrt{K_1^2+K_2^2} = K$ とおくと

$$\begin{aligned} x(t) &= Ke^{\gamma t}(\cos\omega t\cos\delta - \sin\omega t\sin\delta) \\ &= Ke^{\gamma t}\cos(\omega t + \delta) \end{aligned} \tag{3.17}$$

(ii) $\alpha = \beta$ の場合

(3.11) より $A'(t) = C_1$ だから

$$A(t) = C_1 t + C_3 \quad (C_3 : \text{任意定数}) \tag{3.18}$$

(3.10) と (3.18) より

$$x(t) = A(t)e^{\beta t} = (C_1 t + C_3)e^{\beta t} = (C_1 t + C_3)e^{\alpha t} \tag{3.19}$$

# 4　単振動

## 4.1　単振動に関する諸定義

さまざまな振動の中で，最も重要なものの一つは，一直線上を運動する質点の変位 $x$ が時間の関数として

$$\begin{cases} x(t) = a\cos(\omega t + \delta) & (4.1\text{a}) \\ \text{or} & \\ x(t) = a\sin(\omega t + \delta) & (4.1\text{b}) \end{cases}$$

によって表されるもので，これを単振動または 1 次元調和振動とよぶ．また，このような運動をする質点を 1 次元調和振動子とよぶ．質点の速度は (4.1a)，(4.1b) に対応して

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = -\omega a\sin(\omega t + \delta) & (4.2\text{a}) \\ \text{or} & \\ \dfrac{d}{dt}x(t) = \omega a\cos(\omega t + \delta) & (4.2\text{b}) \end{cases}$$

となり，加速度は

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2}x(t) = -\omega^2 a\cos(\omega t + \delta) & (4.3\text{a}) \\ \text{or} & \\ \dfrac{d^2}{dt^2}x(t) = -\omega^2 a\sin(\omega t + \delta) & (4.3\text{b}) \end{cases}$$

(4.1a)，(4.1b) を用いれば (4.3a)，(4.3b) はいずれも

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \tag{4.4}$$

となる．したがって，このような運動をしている質点に作用している力 $F$ は，質点の質量を $m$ とすれば

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = -m\omega^2 x \tag{4.5}$$

となる．$m\omega^2$ は常に正であるから，この力の大きさが変位に比例し，常に原点に向かう引力である．質点が原点から離れると元に戻ろうとする力であるから復元力[1]ともいう．

[1] 船を扱う分野では復原力と記す．

これらの式の中に現れる定数の意味について考える．(4.1a)，(4.1b) より $-a \leqq x \leqq a$ であるから，$a$ は変位の最大値を定めるもので振幅とよぶ．$\omega t + \delta$ を位相とよぶ．また，$\delta$ は $t = 0$ での位相を定めるもので初期位相とよぶ．

また，三角関数の周期性によって

$$t' = t + \frac{2\pi}{\omega} \tag{4.6}$$

のとき

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t'} = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t} \tag{4.7}$$

となり運動の状態は時刻 $t$ と全く同じになる．いいかえると

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{4.8}$$

だけ時間がたつごとに運動がくり返される．この $T$ を周期という．このように一定の時間がたつごとに運動の状態がくり返されるようなことを周期的であるという．

## 4.2　単振動の運動方程式

前述したように，単振動を行う質点に働いている力は定点からの距離に比例する復元力であるから，質点の運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx, \quad c > 0 \tag{4.9}$$

である．この方程式は数学的には定係数 2 階線形同次線形微分方程式とよばれる形式に属するものある．

(4.9) より

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{m}x = 0 \tag{4.10}$$

(4.10) の特性方程式は

$$\lambda^2 + \frac{c}{m} = 0 \tag{4.11}$$

(4.11) の解は

$$\lambda = \pm i\sqrt{\frac{c}{m}} \tag{4.12}$$

よって

$$x = A\cos\left(\sqrt{\frac{c}{m}}t + \delta\right) \tag{4.13}$$

$A$ と $\delta$ は初期条件により決まる．

# 5　減衰振動

## 5.1　減衰振動の方程式と解

単振り子やばね振り子などを振動させてみると振幅は次第に小さくなり止まってしまう．このような運動を減衰振動という．

本稿では，1 次元調和振動子に速さに比例する抵抗がある場合を考える．速さに比例する抵抗を $R$ とすれば，$R$ の大きさは $\frac{dx}{dt}$ に比例し，向きは $\frac{dx}{dt}$ と反対であるから，後の便宜上比例定数を $2mk$ とおくと

$$R = -2mk\frac{dx}{dt}$$

となる．ただし，$m$ は振動子の質量，また $k > 0$ とする．一方，復元力は単振動の場合と同じように $-m\omega^2 x$ と書けば，運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -m\omega^2 x - 2mk\frac{dx}{dt} \tag{5.1}$$

移項して，$m$ で除すると

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2k\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \tag{5.2}$$

となる．これは定係数 2 階線形同次微分方程式である．これの特性方程式は

$$\lambda^2 + 2k\lambda + \omega^2 = 0 \tag{5.3}$$

であり，その解は

$$\lambda = -k \pm \sqrt{k^2 - \omega^2} \tag{5.4}$$

である．

**(i) $k^2 - \omega^2 < 0$ の場合**

これは復元力に対して抵抗が比較的小さい場合である．

$$\lambda = -k \pm i\sqrt{\omega^2 - k^2} \tag{5.5}$$

よって，この場合 (5.2) の解は

$$\begin{aligned} x &= Ae^{-kt}\cos(\sqrt{k^2-\omega^2}t + \alpha) \\ &= Ae^{-kt}\cos(\omega' t + \alpha) \end{aligned} \tag{5.6}$$

となる．ここで $\omega'^2 = k^2 - \omega^2$．$x$ は $Ae^{-kt}$ と $-Ae^{-kt}$ との 2 つの曲線にはさまれて，振動子ながら，しだいにの 0 に近づいていく．

この場合の減衰振動は完全な周期運動ではないが，質点が $x = 0$ を同じ向きで通過する時刻の間隔は (5.6) より

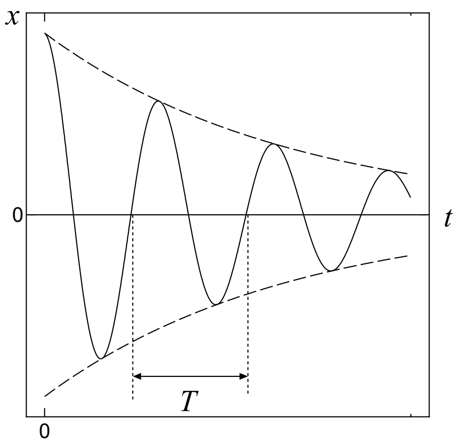


図 1: 減衰振動

$$T = \frac{2\pi}{\omega'} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - k^2}} \tag{5.7}$$

となり，一定である．$|x|$ が極大になるのは $\frac{dx}{dt} = 0$ のときであるから (5.6) を微分すると

$$\frac{dx}{dt} = Ae^{-kt}\left\{-k\cos(\omega' t + \alpha) - \omega' \sin(\omega' t + \alpha)\right\} \tag{5.8}$$

となる．ここで, $k = b\sin\beta$，$\omega' = b\cos\beta$ となるように $b$，$\beta$ を選べば

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ae^{-kt}\left\{-b\sin\beta\cos(\omega' t + \alpha) - b\cos\beta\sin(\omega' t + \alpha)\right\} \\ &= -Abe^{-kt}\left\{-\sin\beta\cos(\omega' t + \alpha) - \cos\beta\sin(\omega' t + \alpha)\right\} \\ &= -Abe^{-kt}\sin(\omega' t + \alpha + \beta) \end{aligned} \tag{5.9}$$

と表せるから，$\frac{dx}{dt} = 0$ となるのは

$$\omega' t_n + \alpha + \beta = n\pi \tag{5.10}$$

が成立する時刻である．したがって，極大は一定の時間間隔で現れ，その時間間隔は $\frac{T}{2}$ に等しい．また，$t_n$ における極大値 $x_n$ は (5.6) と (5.10）より

$$x_n = Ae^{-kt}\cos(n\pi - \beta) \tag{5.11}$$

であるから，$T = \frac{2\pi}{\omega'}$ だけ後の時刻 $t_{n+2}$ における極大値 $x_{n+2}$ と $x_n$ との比を求めれば

$$\begin{aligned}\frac{x_{n+2}}{x_n} &= e^{-k(t_{n+2}-t_n)}\frac{\cos((n+2)\pi - \beta)}{\cos(n\pi - \beta)} \\ &= \exp\left(-k\frac{2\pi}{\omega'}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{2\pi k}{\sqrt{\omega^2 - k^2}}\right) \qquad (5.12)\end{aligned}$$

となり，時間に無関係な定数となる．(5.12) の対数をとって符号を変えた

$$\Lambda = -\log_e \frac{x_{n+2}}{x_n} \tag{5.13}$$

を対数減衰率という．

**(ii) $k^2 - \omega^2 > 0$ の場合**

特性方程式

$$\lambda^2 + 2k\lambda + \omega^2 = 0$$

の解は

$$\lambda = -k \pm \sqrt{k^2 - \omega^2} < 0$$

である．

$$\lambda_1 = -k - \sqrt{k^2 - \omega^2} < 0, \quad \lambda_2 = -k + \sqrt{k^2 - \omega^2} < 0$$

とおくと運動方程式の解は

$$x = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} \quad (A_1 \text{と } A_2 \text{は任意定数})$$

この場合を過減衰といい，振動的ではない．

**(iii) $k^2 - \omega^2 = 0$ の場合**

特性方程式

$$\lambda^2 + 2k\lambda + \omega^2 = 0$$

の解は

$$\lambda = -k(\text{重解})$$

であるから運動方程式の解は

$$x = A_1 e{-kt} + A_2 t e^{-kt}$$

となり，この場合も振動的でない．これを臨界減衰の状態という．

### 5.2　減衰振動のエネルギー

次式で表される減衰振動をしている質点（減衰振動子）のエネルギー変化について考える．

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+2mk\frac{dx}{dt}+m\omega^2x=0 \tag{5.14}$$

上式の両辺に $\frac{dx}{dt}$ をかけて

$$m\cdot\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dx}{dt}+2mk\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+m\omega^2x\cdot\frac{dx}{dt}=0 \tag{5.15}$$

とする．ここで

$$\frac{1}{2}m\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\frac{1}{2}m\cdot 2\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)=m\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dx}{dt} \tag{5.16}$$

$$\frac{1}{2}m\omega^2\cdot\frac{d}{dt}(x^2)=\frac{1}{2}m\omega^2\cdot 2x\cdot\frac{dx}{dt}=m\omega^2x\cdot\frac{dx}{dt} \tag{5.17}$$

であるから，(5.15)，(5.16) および (5.17) より

$$=\frac{1}{2}m\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+2mk\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}m\omega^2\frac{d}{dt}(x^2)=0$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}m\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}m\omega^2\frac{d}{dt}(x^2)=-2mk\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \tag{5.18}$$

$$\therefore\quad \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}m\omega^2x^2\right\}=-2mk\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \tag{5.19}$$

右辺は時刻 $t_0$ と $t_1$ の間の質点の全エネルギーの変化であり，(5.19) から明らかなように常に非正である．すなわち，減衰振動の全エネルギーは減少していくのである．ここで

$$E=\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}m\omega^2x^2 \tag{5.20}$$

とおけば，$E$ は質点の運動エネルギーと位置エネルギーの和，すなわち力学的全エネルギーを表す．(5.19) の右辺は $\frac{dx}{dt}$ の正負にかかわらず非正である．これは減衰振動子の力学的全エネルギー $E$ が時間とともに減少していくことを示している．

次に (5.19) の両辺を $t_0$ から $t_1$ まで時間について積分すると

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{dE}{dt}dt=\int_{t_0}^{t_1}\left\{-2mk\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right\}dt=\int_{t_0}^{t_1}\left(-2mk\frac{dx}{dt}\right)\frac{dx}{dt}dt \tag{5.21}$$

となる．時刻 $t_0, t_1$ における質点の位置をそれぞれ $x_0, x_1$ とすれば

$$E(t_1)-E(t_0)=\int_{t_0}^{t_1}\left(-2mk\frac{dx}{dt}\right)dx \tag{5.22}$$

と書きかえることができる．

# 6　2 階線形非同次微分方程式

## 6.1　定数変化法

### 6.1.1　2 階線形非同次微分方程式の定義と定理

【定義】

関数 $P(t), Q(t), R(t)$ について微分方程式

$$x'' + P(t)x' + Q(t)x = R(t)$$

は 2 階線形微分方程式と呼ばれる．とくに $R(t) = 0$ のとき

$$x'' + P(t)x' + Q(t)x = 0$$

は同次（斉次）形と呼ばれる．そうでない場合は非同次（非斉次）形と呼ばれる。

【定理】

非同次（非斉次）方程式

$$x'' + P(t)x' + Q(t)x = R(t) \tag{6.1}$$

に対応する同次 (斉次) 微分方程式

$$x'' + P(t)x' + Q(t)x = 0 \tag{6.2}$$

の基本解を $x_1(t), x_2(t)$ として

$$x = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t) \tag{6.3}$$

とおく．

$$c_1'(t)x_1(t) + c_2'(t)x_2(t) = 0 \tag{6.4}$$

$$c_1'(t)x_1'(t) + c_2'(t)x_2'(t) = R(t) \tag{6.5}$$

(6.4) と (6.5) の条件が満たされるとき，(6.3) で表される $x$ は微分方程式 (6.1) の解である．

【証明】

$$x = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t) \tag{6.6}$$

を微分して

$$\begin{aligned}
x' &= c_1'(t)x_1(t) + c_1(t)x_1'(t) + c_2'(t)x_2(t) + c_2(t)x_2'(t) \\
&= \{c_1'(t)x_1(t) + c_2'(t)x_2(t)\} + \{c_1(t)x_1'(t) + c_2(t)x_2'(t)\} \\
&= 0 + \{c_1(t)x_1'(t) + c_2(t)x_2'(t)\} \quad \because (6.4) \\
&= c_1(t)x_1'(t) + c_2(t)x_2'(t) \qquad (6.7)
\end{aligned}$$

さらに，微分して

$$\begin{aligned} x'' &= c_1'(t)x_1'(t) + c_1(t)x_1''(t) + c_2'(t)x_2'(t) + c_2(t)x_2''(t) \\ &= \{c_1'(t)x_1'(t) + c_2'(t)x_2'(t)\} + \{c_1(t)x_1''(t) + c_2(t)x_2''(t)\} \\ &= R(t) + c_1(t)x_1''(t) + c_2(t)x_2''(t) \qquad \because (6.5) \end{aligned} \tag{6.8}$$

$x'' + Px' + Qx$ に (6.6),(6.7) および (6.8) を代入すると

$$\begin{aligned} x'' + P(t)x' + Q(t)x &= \{R(t) + c_1(t)x_1''(t) + c_2(t)x_2''(t)\} \\ &+ P(t)\{c_1(t)x_1'(t) + c_2(t)x_2'(t)\} \\ &+ Q(t)\{c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t)\} \\ &= R(t) + c_1(t)\{x_1''(t) + P(t)x_1'(t) + Q(t)x_1(t)\} \\ &+ c_2(t)\{x_2''(t) + Px_2'(t) + Q(t)x_2(t)\} \\ &= R(t) \qquad \because x_1(t) \text{ と } x_2(t) \text{ は (6.2) の基本解} \end{aligned} \tag{6.9}$$

よって解であることが示された．　　　　(証明終わり)

### 6.1.2　解法：定数変化法

条件 (6.4), (6.5) が満たされるとき (6.3) の $x$ が (6.1) の解であるから，連立 1 次方程式として解いて $c_1'(t)$ と $c_2'(t)$ をまず求める．(6.4), (6.5) より

$$\begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ R(t) \end{bmatrix} \tag{6.10}$$

$x_1(t)$ と $x_2(t)$ は (6.2) の基本解だから，次のロンスキアン (ロンスキ行列式) は 0 でない．

$$W[x_1(t), x_2(t)] = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} = x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t) \neq 0 \tag{6.11}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ R(t) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{W[x_1(t), x_2(t)]} \begin{bmatrix} x_2'(t) & -x_2(t) \\ -x_1'(t) & x_1(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ R(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{6.12}$$

$$c_1'(t) = \frac{-x_2(t)R(t)}{W[x_1(t), x_2(t)]}, \quad c_2'(t) = \frac{x_1(t)R(t)}{W[x_1(t), x_2(t)]} \tag{6.13}$$

(6.13) を積分すると $c_1(t)$ と $c_2(t)$ が求まり, (6.1) の解 $x$ が求まる．以上をまとめると

$$x = x_1(t) \int \frac{-x_2(t)R(t)}{W[x_1(t), x_2(t)]} dt + x_2(t) \int \frac{x_1(t)R(t)}{W[x_1(t), x_2(t)]} dt \tag{6.14}$$

となる．積分に積分定数を入れると一般解が求まる．

### 6.1.3　例題：定数変化法

$$\ddot{\phi} + 3\dot{\phi} + 2\phi = \cos t \tag{1}$$

の一般解を求めよ．

【解】(1) に対応する同次方程式

$$\ddot{\phi} + 3\dot{\phi}t + 2\phi = 0 \tag{2}$$

とその特性方程式とその解は

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 2)(\lambda + 1) = 0$$

よって

$$\lambda = -2, -1 \tag{3}$$

であるから (2) の基本解は

$$\phi_1(t) = e^{-2t}, \quad \phi_2(t) = e^{-t}, \tag{4}$$

であり，このとき

$$-2\dot{\phi}_2(t) = e^{-2t}, \quad -\dot{\phi}_2(t) = e^{-t} \tag{5}$$

である．ロンスキアン（ロンスキ行列式）は

$$W[\phi_1(t), \phi_2(t)] = \begin{vmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) \\ \dot{\phi}_1(t) & \dot{\phi}_2(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-2t} & e^{-t} \\ -2e^{-2t} & -e^{-t} \end{vmatrix} = e^{-3t} \neq 0 \tag{6}$$

$$\phi(t) = c_1(t)\phi_1(t) + c_2(t)\phi_2(t) = 0 \tag{7}$$

とおいたとき，次の条件が満たされれば (7) は (1) の解となる．

$$\begin{bmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) \\ \dot{\phi}_1(t) & \dot{\phi}_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \dot{c}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos t \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{c}_1(t) \\ \dot{c}_2(t) \end{bmatrix} &= \frac{1}{W[\phi_1(t), \phi_2(t)]} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_2(t) & -\dot{\phi}_2(t) \\ \dot{\phi}_1(t) & \dot{\phi}_1(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos t \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{e^{-3t}} \begin{bmatrix} -e^{-t} & -e^{-t} \\ 2e^{-2t} & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{2t}\cos t \\ e^t cost \end{bmatrix} \end{aligned}$$

よって

$$\dot{c}_1(t) = -e^{2t}\cos t \tag{9}$$

$$\dot{c}_2(t) = e^t \cos t \tag{10}$$

$$c_1(t) = \int -e^{2t}\cos t dt = -\frac{2}{5}e^{2t}\cos t - \frac{1}{5}e^{2t}\sin t + A \tag{11}$$

$$c_2(t) = \int e^{t}\cos t dt = -\frac{1}{2}e^{t}\cos t + \frac{1}{2}e^{t}\sin t + B \tag{12}$$

(4), (7), (11), (12) より

$$\phi(t) = c_1(t)\phi_1 + c_2(t)\phi_2(t)$$

$$= e^{-2t}\left(-\frac{2}{5}e^{2t}\cos t - \frac{1}{5}e^{2t}\sin t + A\right) + e^{-t}\left(\frac{1}{2}e^{t}\cos t + \frac{1}{2}e^{t}\sin t + B\right)$$

$$= \frac{1}{10}\cos t + \frac{3}{10}\sin t + Ae^{-2t} + Be^{-t}$$

【別解】

$$c_1(t) = \int -e^{2t}\cos t dt = -\frac{2}{5}e^{2t}\cos t - \frac{1}{5}e^{2t}\sin t \tag{13}$$

$$c_2(t) = \int e^{t}\cos t dt = -\frac{1}{2}e^{t}\cos t + \frac{1}{2}e^{t}\sin t \tag{14}$$

のように積分定数を 0 としておいて次の計算をする．

$$\phi(t) = c_1(t)\phi_1 + c_2(t)\phi_2(t)$$

$$= e^{-2t}\left(-\frac{2}{5}e^{2t}\cos t - \frac{1}{5}e^{2t}\sin t\right) + e^{-t}\left(\frac{1}{2}e^{t}\cos t + \frac{1}{2}e^{t}\sin t\right)$$

$$= \frac{1}{10}\cos t + \frac{3}{10}\sin t$$

(4) より基本解が

$$\phi_1(t) = e^{-2t}, \quad \phi_2(t) = e^{-t},$$

であるから

$$\phi(t) = \frac{1}{10}\cos t + \frac{3}{10}\sin t + Ae^{-2t} + Be^{-t}$$

が解として得られる．

## 6.2 ラプラス変換を用いた解法

### 6.2.1 ラプラス変換

実数 $t$ に対して，実数値関数 $f(t)$ は区間 $[0,\infty)$ で定義されていて，この区間における任意の有限な区間で積分可能とする．このとき $s(s=x+iy)$ を複素数とし，無限積分

$$\int_0^\infty f(t)dt = \lim_{\alpha\to\infty}\int_0^\alpha e^{-st}f(t)dt \tag{6.15}$$

が収束するとき

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt \tag{6.16}$$

このとき $F(s)$ を $f(t)$ のラプラス変換またはラプラス積分という．記号では，次のような $L$ を用いて表すことにする．

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{-st} f(t)dt \tag{6.17}$$

$t$ の関数 $f(t)$ を原関数，$s$ の関数 $\mathcal{L}\{f(t)\}$ を像関数という．

### 6.2.2 逆ラプラス変換

$f(t)$ のラプラス変換は

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt \tag{6.18}$$

であるから積分の性質より $f(t)$ に有限個の点を与えてもラプラス変換は同じである．このことから $F(s)$ に対して，$f(t)$ を求める対応を

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \tag{6.19}$$

とかいて，これを逆ラプラス変換という．ここで，$f(t)$ が連続で微分可能ならば

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} \Leftrightarrow f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \tag{6.20}$$

が成り立っている．

### 6.2.3 ラプラス変換の基本公式

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{at}\}\ (\mathrm{Re}\ s > a) \quad &= \int_0^\infty e^{-st}e^{at}dt \\ &= \int_0^\infty e^{-(s-a)}dt = \left[-\frac{1}{s-a}e^{-(s-a)t}\right]_0^\infty = \frac{1}{s-a}\end{aligned} \tag{6.21}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\cos\omega t\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left\{e^{-(s-i\omega)t}+e^{-(s+i\omega)t}\right\}dt \\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{(s-i\omega)t}e^{-(s-i\omega)t}-\frac{1}{(s+-i\omega)t}e^{-(s+i\omega)t}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-i\omega}+\frac{1}{s+i\omega}\right) \\ &= \frac{s}{s^2+\omega^2} \qquad (6.22)\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}\{\sin\omega t\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i}\right\} = \int_0^\infty \left\{\frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i}\right\} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \qquad (6.23)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f'(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}f'(t)dt = \left[e^{-st}f(t)\right]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt \\ &= -f(0)+sF(s) \qquad (6.24)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f''(t)\} &= \int_0^\infty f''(t)dt = \left[e^{-st}f'(t)\right]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}f'(t)dt \\ &= -f'(0)+\{-f(0)+sF(s)\} = -f'(0)-sf(0)+s^2F(s) \qquad (6.25)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}F(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}e^{-st}f(t)dt\int_0^\infty(-te^{-st})dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st}\{-tf(t)\}dt = -\mathcal{L}\{tf(t)\} \qquad (6.26)\end{aligned}$$

よって

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds}F(s) \qquad (6.27)$$

$$\mathcal{L}\{t\cos\omega t\} = -\frac{d}{ds}\left\{\frac{s}{s^2+\omega^2}\right\} = \frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2} \qquad (6.28)$$

$$\mathcal{L}\{t\sin\omega t\} = -\frac{d}{ds}\left\{\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right\} = \frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2} \qquad (6.29)$$

### 6.2.4　例題：ラプラス変換を用いた解法

$$\ddot{\phi}+3\dot{\phi}+2\phi = \cos t \qquad (1)$$

【解】初期条件を

$$\phi(0)=a, \quad \dot{\phi}=b \tag{2}$$

とおく.

$$\mathcal{L}\{\ddot{\phi}+3\dot{\phi}+2\phi|\}=\mathcal{L}\{\cos t\} \tag{3}$$

$$\mathcal{L}\{\ddot{\phi}\}+3\mathcal{L}\{\dot{\phi}\}+2\mathcal{L}\{\phi\}=\mathcal{L}\{cost\} \tag{4}$$

$$\mathcal{L}\{\ddot{\phi}\}=s^2\Phi(s)-s\phi)(0)-\dot{\phi}(0)=s^2\Phi(s)-as-b \tag{5}$$

$$\mathcal{L}\{\dot{\phi}\}=s\Phi(s)-\phi(0)=s\Phi(s)-a \tag{6}$$

$$\mathcal{L}\{\cos t\}=\frac{s}{s^2+1} \tag{7}$$

(5),(6),(7) を (4) へ代入して

$$s^2\Phi(s)-as-b+3s\Phi(s)-3a+2\Phi(s)=\frac{s}{s^2+1}$$

これを整理して

$$\Phi(s)=\frac{as}{(s+1)(s+2)}+\frac{3a+b}{(s+1)(s+2)}+\frac{s}{(s+1)(s+2)(s^2+1)} \tag{8}$$

右辺第 1 項に対して

$$\frac{as}{(s+1)(s+2)}=\frac{P_1}{s+1}+\frac{Q_1}{s+2} \tag{9}$$

とおくと

$$P_1+\frac{Q_1(s+1)}{s+2}=\frac{as}{(s+2)}$$

$P_1$ を求めるために $s=-1$ を代入すると

$$P_1=\frac{-a}{-1+2}=-a \tag{10}$$

$$Q_1+\frac{P_1(s+2)}{s+1}=\frac{as}{s+1}$$

$Q_1$ を求めるために $s=-2$ を代入すると

$$Q_1=\frac{-2a}{-2+1}=2a \tag{11}$$

(9), (10), (11) より

$$\frac{as}{(s+1)(s+2)}=\frac{-a}{s+1}+\frac{2a}{s+2} \tag{12}$$

右辺第 2 項に対しても

$$\frac{3a+b}{(s+1)(s+2)} = \frac{P_2}{s+1} + \frac{Q_2}{s+2} \tag{13}$$

とおいて，第 1 項の場合と同様にして

$$P_2 = 3a+b \tag{14}$$

$$Q_2 = -(3a+b) \tag{15}$$

(13), (14), (15) より

$$\frac{3a+b}{(s+1)(s+2)} = \frac{3a+b}{s+1} - \frac{3a+b}{s+2} \tag{16}$$

となる．右辺第 3 項に対しても

$$\frac{s}{(s+1)(s+2)(s^2+1)} = \frac{P_3}{(s+1)} + \frac{Q_3}{(s+2)} + \frac{R_3 s + T_3}{s^2+1} \tag{17}$$

とおいて，第 1 項の場合と同様にして

$$P_3 = -\frac{1}{2} \tag{18}$$

$$Q_3 = \frac{2}{5} \tag{19}$$

次に $R_3$ と $T_3$ について

$$\frac{P_3(s^2+1)}{s+1} + \frac{Q_3(s^2+1)}{s+2} + R_3 s + T_3 = \frac{s}{(s+1)(s+2)}$$

右辺第 1 項と第 2 項を 0 とするために $s = i$ を代入して

$$R_3 i + T_3 = \frac{i+3}{10} \tag{20}$$

(20) より

$$R_3 = \frac{1}{10}$$

$$T_3 = \frac{3}{10} \tag{21}$$

以上より

$$\Phi(s) = -\frac{a}{s+1} + \frac{2a}{s+2} + \frac{3a+b}{s+1} - \frac{3a+b}{s+2} + \frac{\frac{-1}{2}}{s+1} + \frac{\frac{2}{5}}{s+2} + \frac{\frac{s}{10}}{s^2+1}\frac{\frac{3}{10}}{s^2+1} \tag{23}$$

(23) を逆変換して

$$\begin{aligned} \phi(t) &= -ar^{-t} + 2ae^{-2t} + (3a+b)e^{-t} - (3a+b)e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{2}{5}e^{-2t} + \frac{1}{10}\cos t + \frac{3}{10}\sin t \\ &= \left(2a+b-\frac{1}{2}\right)e^{-t} + \left(\frac{2}{5}-a-b\right)e^{-2t} + \frac{1}{10}\cos t + \frac{3}{10}\sin t \\ &= \frac{1}{10}\cos t + \frac{3}{10}\sin t + As^{-2t} + Be^{-t} \end{aligned}$$

ここで $A = \frac{2}{5} - a - b$，$B = 2a + b - \frac{1}{2}$

## 6.3　未定係数法

$$\frac{d^2x}{dt^2} + P(t)\frac{dx}{dt} + Q(t)x = R(t) \tag{6.30}$$

において，$P(t)$ と $Q(t)$ が定数の場合

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = R(t) \tag{6.31}$$

の非同次項 $R(t)$ の形から特殊解の形が推測される．ここで特性方程式は

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \tag{6.32}$$

である．

### 6.3.1　非同次項が $R(t) = at^m$ の場合

特性方程式の解　特殊解
0:解でない　$t$ の $m$ 次式
0:1 重解　$t\times$ ($t$ の $m$ 次式)
0:2 重解　$t^2\times$ ($t$ の $m$ 次式)

【例】$R(t) = t^2$ の場合
・特性方程式が $(\lambda+2)(\lambda+1) = 0$ のとき，$\lambda = -2, -1$ で 0 でないので解でない．
・$\lambda(\lambda-1)$ のとき，$\lambda = 0, 1$ なので 1 重解
・$\lambda^2 = 0$ のとき，$\lambda = 0$(重解) なので 2 重解

### 6.3.2　非同次項が $R(t) = ae^{\alpha t}$ の場合

特性方程式の解　特殊解
$\alpha$:解でない　$Ae^{\alpha t}$
$\alpha$:1 重解　$Ate^{\alpha t}$
$\alpha$:2 重解　$At^2e^{\alpha t}$

【例】$R(t) = e^{2t}$ の場合
・$(\lambda+1)(\lambda+2) = 0$ のとき，$\lambda = -1, -2$ なので解でない．
・$(\lambda+1)(\lambda-2) = 0$ のとき，$\lambda = -1, 2$ なので 1 重解．
・$(\lambda-2)^2 = 0$ のとき，$\lambda 2$(重解) なので 2 重解．

### 6.3.3　非同次項が $R(t) = at^m e^{\alpha t}$ の場合

特性方程式の解　特殊解
$\alpha$:解でない　$e^{\alpha t}\times$ ($t$ の $m$ 次式)
$\alpha$:1 重解　$te^{\alpha t}\times$ ($t$ の $m$ 次式)
$\alpha$:2 重解　$t^2e^{\alpha t}\times$ ($t$ の $m$ 次式)

### 6.3.4　非同次項が $R(t) = a\cos qt$ または $a\sin qt$ の場合

| 特性方程式の解 | 特殊解 |
|---|---|
| $qi$:解でない | $A\cos qt + B\sin qt$ |
| $qi$:解である | $t(A\cos qt + B\sin qt)$ |

【例】$R(t) = \cos 2t$ の場合

・$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \cos 2t$

のとき，特性方程式が $\lambda^2 + 1 = 0$ で $\lambda = \pm i$ なので解でない．

・$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = \cos 2t$

のとき，特性方程式が $\lambda^2 + 4 = 0$ で $\lambda = \pm 2i$ なので解である．

### 6.3.5　非同次項が $R(t) = ae^{pt}\cos qt$ または $a\sin e^{pt}qt$ の場合

| 特性方程式の解 | 特殊解 |
|---|---|
| $p \pm qi$:解でない | $e^{pt}(A\cos qt + B\sin qt)$ |
| $p \pm qi$:解である | $te^{pt}(A\cos qt + B\sin qt)$ |

### 6.3.6　例題：未定係数法

$$\ddot{\phi} + 3\dot{\phi} + 2\phi = \cos t \tag{1}$$

の一般解を求めよ．

（解）(1) に対応する特性方程式は $(\lambda+1)(\lambda+2) = 0$ より $\lambda = -1, -2$ で 1 でない．よって (1) の特殊解を

$$\phi = c_1 \cos t + c_2 \sin t \tag{2}$$

とおくと

$$\dot{\phi} = -c_1 \sin t + c_2 \cos t \tag{3}$$

$$\ddot{\phi} = -c_1 \cos t - c_2 \sin t \tag{4}$$

(2), (3), (4) を (1) へ代入して整理すると

$$(c_1 + 3c_2 - 1)\cos t + (-3c_1 + c_2)\sin t = 0 \tag{5}$$

$$c_1 + 3c_2 = 1, \quad -3c_1 + c_2 = 0 \tag{6}$$

(6) より

$$c_1 = \frac{1}{10}, \quad c_2 = \frac{3}{10} \tag{7}$$

(1) に対応する同次方程式の解は

$$Ae^{-2t} + Be^{-t} \quad (A, B \text{ は任意定数}) \tag{8}$$

(7) と (8) より (1) の一般解は

$$\phi = \frac{1}{10}\cos t + \frac{3}{10}\sin t + Ae^{-2t} + Be^{-t}$$

# 7　強制振動 (外力は余弦関数)

## 7.1　抵抗が無視できる場合

次式で表される場合を考える．

$$mx''(t) + m\omega_0^2 x(t) = F\cos\omega t \tag{7.1}$$

(7.1) の両辺を $m$ で割って

$$x'' + \omega_0^2 x = \frac{F}{m}\cos\omega t \tag{7.2}$$

とした方程式を扱う．

### 7.1.1　定数変化法で運動方程式を解いた場合

(i)$\omega \neq \omega_0$ の場合

(7.2) に対応する同次微分方程式の特性方程式は

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0, \quad \lambda = \pm i\omega_0 \tag{7.3}$$

だから，基本解は

$$x_1(t) = \cos\omega_0 t, \quad x_2(t) = \sin\omega_0 t \tag{7.4}$$

となる．

$$\begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\omega_0 t & \sin\omega_0 t \\ -\omega_0\sin\omega_0 t & \omega_0\cos\omega_0 t \end{bmatrix} \tag{7.5}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\omega_0 t & -\frac{1}{\omega_0}\sin\omega_0 t \\ \sin\omega_0 t & \frac{1}{\omega_0}\cos\omega_0 t \end{bmatrix} \tag{7.6}$$

$$\begin{bmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\omega_0 t & -\frac{1}{\omega_0}\sin\omega_0 t \\ \sin\omega_0 t & \frac{1}{\omega_0}\cos\omega_0 t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{F}{m}\cos\omega t \end{bmatrix} \tag{7.7}$$

$$\begin{aligned} c_1'(t) &= -\frac{F}{m\omega_0}\sin\omega_0 t\cos\omega t \\ &= -\frac{F}{2m\omega_0}\left\{\sin(\omega_0+\omega)t + \sin(\omega_0-\omega)t\right\} \end{aligned} \tag{7.8}$$

$$
\begin{aligned}
c_1(t) &= -\frac{F}{2m\omega_0}\left\{\frac{-\cos(\omega_0+\omega)t}{\omega_0+\omega}+\frac{-\cos(\omega_0-\omega)t}{\omega_0-\omega}\right\} \\
&= \frac{F}{2m\omega_0}\left\{\frac{(\omega_0-\omega)\cos(\omega_0+\omega)t+(\omega_0+\omega)\cos(\omega_0-\omega)t}{\omega_0^2-\omega^2}\right\}
\end{aligned} \tag{7.9}
$$

$$
\begin{aligned}
c_2'(t) &= \frac{F}{2m\omega_0}\cos\omega_0 t\cos\omega t \\
&= \frac{F}{2m\omega_0}\{\cos(\omega_0+\omega)t+\cos(\omega_0-\omega)t\}
\end{aligned} \tag{7.10}
$$

$$
\begin{aligned}
c_2(t) &= \frac{F}{2m\omega_0}\left\{\frac{\sin(\omega_0+\omega)t}{\omega_0+\omega}+\frac{\sin(\omega_0-\omega)t}{\omega_0-\omega}\right\} \\
&= \frac{F}{2m\omega_0}\left\{\frac{(\omega_0-\omega)\sin(\omega_0+\omega)t+(\omega_0+\omega)\sin(\omega_0-\omega)t}{\omega_0^2-\omega^2}\right\}
\end{aligned} \tag{7.11}
$$

$$
x(t)=c_1(t)x_1(t)+c_2(t)x_2(t)=\frac{F}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\cos\omega t \tag{7.12}
$$

(7.15) と (7.12) より求める一般解は

$$
x(t)=K_1\cos\omega_0 t+K_2\cos\omega_0 t+\frac{F}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\cos\omega t \tag{7.13}
$$

である．

(ii)$\omega=\omega_0$ の場合

(7.2) に対応する同次微分方程式の特性方程式は

$$
\lambda^2+\omega_0^2=0,\quad \lambda=\pm i\omega_0 \tag{7.14}
$$

だから，基本解は

$$
x_1(t)=\cos\omega_0 t,\quad x_2(t)=\sin\omega_0 t \tag{7.15}
$$

となる．

$$
\begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\omega_0 t & \sin\omega_0 t \\ -\omega_0\sin\omega_0 t & \omega_0\cos\omega_0 t \end{bmatrix} \tag{7.16}
$$

$$
\begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\omega_0 t & -\frac{1}{\omega_0}\sin\omega_0 t \\ \sin\omega_0 t & \frac{1}{\omega_0}\cos\omega_0 t \end{bmatrix} \tag{7.17}
$$

$$\begin{bmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\omega_0 t & -\frac{1}{\omega_0}\sin\omega_0 t \\ \sin\omega_0 t & \frac{1}{\omega_0}\cos\omega_0 t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{F}{m}\cos\omega_0 t \end{bmatrix} \tag{7.18}$$

$$c_1'(t) = -\frac{F}{m\omega_0}\sin\omega_0 t\cos\omega_0 t = -\frac{F}{2m\omega_0}\sin 2\omega_0 t \tag{7.19}$$

$$c_1(t) = -\int \frac{F}{2m\omega}\sin 2\omega_0 t dt = \frac{F}{4m\omega_0^2}\cos 2\omega_0 t + A \tag{7.20}$$

$$c_2'(t) = \frac{F}{m\omega_0}\cos^2\omega_0 t = \frac{F}{2m\omega_0}(1+\cos 2\omega_0 t) \tag{7.21}$$

$$c_2(t) = \int \frac{F}{2m\omega_0}(1+\cos 2\omega_0 t)dt = \frac{F}{2m\omega_0}t + \frac{F}{4m\omega_0^2}\sin 2\omega_0 t + B \tag{7.22}$$

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t) \\ &= \left(\frac{F}{4m\omega_0^2} + A\right)\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + \frac{F}{2m\omega_0}t\sin\omega_0 t \\ &= K_1\cos\omega_0 t + K_2\sin\omega_0 t + \frac{F}{2m\omega_0}t\sin\omega_0 t \end{aligned} \tag{7.23}$$

上式第3項目より，$\omega = \omega_0$ の場合 $x(t)$ は発散する．$x(t)$ が船や吊橋の揺れならば，大変危険な状態に至ることを表している．

### 7.1.2　ラプラス変換を用いて運動方程式を解いた場合

(i)$\omega \neq \omega_0$ の場合
(7.2) より

$$x'' + \omega_0^2 x = \frac{F}{m}\cos\omega t$$

上式の両辺をラプラス変換すると

$$\left\{s^2X(s) - sx(0) - x'(0)\right\} + \omega_0 X(s) = \frac{F}{m}\cdot\frac{s}{s^2+\omega^2}$$

$$\therefore X(s) = \frac{s}{s^2+\omega_0^2}\cdot x(0) + \frac{1}{\omega_0}\cdot\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}\cdot x'(0) + \frac{F}{m}\cdot\frac{s}{(s^2+\omega^2)(s^2+\omega_0^2)} \tag{7.24}$$

左辺第 3 項に対して

$$\frac{s}{(s^2+\omega^2)(s^2+\omega_0^2)} = \frac{as+b}{s^2+\omega^2} + \frac{cs+d}{s^2+\omega_0^2} \tag{7.25}$$

とおいて係数を比較すると

$$a = \frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}, \quad b=0, \quad c = -\frac{1}{s^2+\omega_0^2}, \quad d=0 \tag{7.26}$$

(7.24),(7.25),(7.27) より

$$\begin{aligned} X(s) = x(0)\cdot\frac{s}{s^2+\omega_0^2} + x'(0)\cdot\frac{1}{\omega_0}\cdot\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2} \\ +\frac{F}{m}\left(\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}\cdot\frac{s}{s^2+\omega^2} - \frac{1}{\omega_0^2-\omega^2}\cdot\frac{s}{s^2+\omega_0^2}\right) \end{aligned} \tag{7.27}$$

(7.27) の両辺を逆変換して

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0)\cos\omega_0 t + \frac{x'(0)}{\omega_0}\sin\omega_0 t + \frac{F}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\cos\omega t - \frac{F}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\cos\omega_0 t \\ &= \left\{x(0) - \frac{F}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\right\} + \frac{x'(t)}{\omega_0}\sin\omega t + \frac{F}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\cos\omega t \\ &= K_1\cos\omega_0 t + K_2\sin\omega_0 + \frac{F}{m(\omega_0^2-\omega^2)}\cos\omega t \end{aligned} \tag{7.28}$$

ここで $K_1 = x(0) - \frac{F}{m(\omega_0^2-\omega^2)}$，$K_2 = \frac{x'(0)}{\omega_0}$ である．

(ii)$\omega = \omega_0$ の場合
　このとき (7.2) は次のようになる．

$$x'' + \omega_0^2 x = \frac{F}{m}\cos\omega_0 t \tag{7.29}$$

上式の両辺をラプラス変換すると

$$\mathcal{L}\left\{x''(t) + \omega_0^2 x(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{F}{m}\cos\omega_0 t\right\}$$

$$\therefore \left\{-x'(0) - sx(0) + s^2X(s)\right\} + \omega_0^2 X(s) = \frac{F}{m}\cdot\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$$

$$\therefore X(s) = \frac{x'(0)}{\omega_0}\cdot\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2} + x(0)\cdot\frac{s}{s^2+\omega_0^2} + \frac{1}{2\omega_0}\cdot\frac{F}{m}\cdot\frac{2\omega_0 s}{(s^2+\omega_0^2)} \tag{7.30}$$

上式の両辺を逆変換して

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{x'(0)}{\omega_0}\sin\omega_0 t + x(0)\cos\omega_0 t + \frac{F}{2m\omega_0 t}t\sin\omega_0 t \\ &= K_1\cos\omega_0 t + K_2\sin\omega_0 t + \frac{F}{2m\omega_0}t\sin\omega_0 t \end{aligned} \tag{7.31}$$

ここで，$K_1 = x(0)$，$K_2 = \frac{x'(0)}{\omega_0}$ である．

### 7.1.3　未定係数法で運動方程式を解いた場合

(i) $\omega \neq \omega_0$ の場合

$$x'' + \omega_0^2 = \frac{F}{m}\cos\omega t \tag{7.32}$$

に対応する同次方程式の特性方程式 $\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$ の解は

$$\lambda = \pm i\omega_0 \tag{7.33}$$

であり，(7.32) の右辺の角周波数は $\omega$ であり，$\omega_0$ と異なる．よって

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t \tag{7.34}$$

とおくと

$$x' = -\omega A\sin\omega t + \omega B\cos\omega t \tag{7.35}$$

$$x'' = -\omega^2 A\cos\omega t - \omega^2 B\sin\omega t \tag{7.36}$$

(7.34) と (7.36) を (7.32) に代入して整理すると

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2 A - \frac{F}{m}\right)\cos\omega t + \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)B\sin\omega t = 0$$

$$\therefore \quad A = \frac{F}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad B = 0 \tag{7.37}$$

(7.32) に対応する同次方程式の解は $x = K_1\cos\omega_0 t + K_2\sin\omega_0 t(K_1$と $K_2$は任意定数) であるから求める一般解は

$$x = K_1 \cos \omega_0 t + K_2 \sin \omega_0 t + \frac{F}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t \tag{7.38}$$

である．
(ii) $\omega = \omega_0$ の場合

$$x'' + \omega_0^2 = \frac{F}{m} \cos \omega_0 t \tag{7.39}$$

に対応する同次方程式の特性方程式 $\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$ の解は

$$\lambda = \pm i\omega_0 \tag{7.40}$$

であり (7.39) の右辺の角周波数は $\omega_0$ である．よって

$$x = At \cos \omega_0 t + Bt \sin \omega_0 t \tag{7.41}$$

とおくと

$$x' = A \cos \omega_0 - A\omega_0 t \sin \omega_0 t + B \sin \omega_0 t + B\omega_0 \cos \omega_0 t \tag{7.42}$$

$$x'' = -2A\omega_0 \sin \omega_0 t - A\omega_0^2 t \cos \omega_0 t + 2B\omega_0 \cos \omega_0 t - B\omega_0^2 t \sin \omega_0 t \tag{7.43}$$

(7.41) と (7.43) を (7.39) に代入し，整理すると

$$\left(2B\omega_0 - \frac{F}{m}\right) \cos \omega_0 t + (-2A\omega_0) \sin \omega_0 t = 0$$

$$\therefore \quad A = 0, \quad B = \frac{F}{2m\omega_0} \tag{7.44}$$

(7.39) に対応する同次方程式の解は $x = K_1 \cos \omega_0 t + K_2 \sin \omega_0 t (K_1$ と $K_2$は任意定数) であるから求める一般解は

$$x = K_1 \cos \omega_0 t + K_2 \sin \omega_0 t + \frac{F}{2m\omega_0} t \sin \omega_0 t \tag{7.45}$$

である．

## 7.2　速さに比例する抵抗がある場合

### 7.2.1　未定係数法で運動方程式を解いた場合

外力を余弦関数とした次式について考える．

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+2mk\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=F\cos\omega t \tag{7.46}$$

上式の両辺を $m$ で割って

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2k\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=\frac{F}{m}\cos\omega t \tag{7.47}$$

とする．(7.47) に対応する同次方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2k\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0 \tag{7.48}$$

であり，減衰振動の方程式である．この方程式の一般解は先述したように

$$\begin{aligned} x &= K_1e^{-kt}\cos\sqrt{\omega_0^2-k^2}t+K_2e^{-kt}\sin\sqrt{\omega_0^2-k^2}t \\ &= Ke^{-kt}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2-k^2}t+\alpha\right) \quad (K_1,K_2,K,\alpha\text{は任意定数}) \end{aligned} \tag{7.49}$$

である．

(7.48) の特性方程式

$$\lambda^2+2k\lambda+\omega_0^2=0 \tag{7.50}$$

の解は $\lambda=-k\pm i\omega_0$ である．よって

$$x=A\cos\omega t+B\sin\omega t \tag{7.51}$$

とおける．(7.51) を (7.47) に代入して係数を比較することにより

$$A=\frac{F(\omega_0^2-\omega^2)}{m\{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4k^2\omega^2\}} \tag{7.52}$$

$$B=\frac{2Fk\omega}{m\{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4k^2\omega^2\}} \tag{7.53}$$

が得られる．(7.49),(7.51),(7.52) および (7.53) より求める一般解は次式となる．

$$
\begin{aligned}
x(t) &= Ke^{-kt}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2-k^2}t+\alpha\right) \\
&\quad +\frac{F(\omega_0^2-\omega^2)}{m\{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4k^2\omega^2\}}\cos\omega t+\frac{2Fk\omega}{m\{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4k^2\omega^2\}}\sin\omega t
\end{aligned}
\tag{7.54}
$$

さらに

$$
\sqrt{A^2+B^2}=\frac{F}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4k^2\omega^2}} \tag{7.55}
$$

$$
\cos\delta=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},\quad \sin\delta=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \tag{7.56}
$$

とおくと，一般解は

$$
\begin{aligned}
x(t) &= Ke^{-kt}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2-k^2}t+\alpha\right)+\sqrt{A^2+B^2}(\cos\omega t\cos\delta+\sin\omega t\sin\delta) \\
&= Ke^{-kt}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2-k^2}t+\alpha\right)+\frac{F}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4k^2\omega^2}}\cos(\omega t-\delta)
\end{aligned}
\tag{7.57}
$$

上式の第 1 項目は $t\to\infty$ のとき 0 に収束するが，$x(t)$ が船や吊橋の揺れを表しているならば $\omega=\omega_0$ のときは共振して非常に危険である．

### 7.2.2　複素数の性質を用いて運動方程式を解いた場合

先と同様に外力を余弦関数とした次式について考える．

$$
m\frac{d^2x}{dt^2}+2mk\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=F\cos\omega t \tag{7.58}
$$

上式の両辺を $m$ で割って

$$
\frac{d^2x}{dt^2}+2k\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=\frac{F}{m}\cos\omega t \tag{7.59}
$$

として，複素数の性質を用いて (7.59) の解を求める．

(7.59) の $x$ を複素数 $z=x+iy$ で置き換える．また，右辺の外力の項が実数になるような複素数として

$$
\frac{F}{m}e^{i\omega t}
$$

$$
\frac{d^2z}{dt^2}+2k\frac{dz}{dt}+\omega_0^2x=\frac{F}{m}\cos\omega t \tag{7.60}
$$

(7.60) の特解を求めるために $C$ を複素数の定数として

$$z = Ce^{i\omega t} \tag{7.61}$$

とおくと

$$\frac{dz}{dt} = i\omega Ce^{i\omega t} \tag{7.62}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\omega^2 Ce^{i\omega t} \tag{7.63}$$

(7.61),(7.62),(7.63) を (7.60) に代入して整理すると

$$Ce^{i\omega t}(\omega_0^2 - \omega^2 + 2ik\omega) = \frac{F}{m}e^{i\omega t}$$

$$\therefore \quad C = \frac{F}{m} \cdot \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\omega k}$$

図 1 のように

$$\tan\delta = \frac{2\omega k}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

となるような $\delta$ を考える．$\overline{\mathrm{OP}} = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4k^2\omega^2}$ だから

$$\omega_0^2 - \omega^2 = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4k^2\omega^2} \cdot \cos\delta$$

$$2i\omega k = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4k^2\omega^2} \cdot i\sin\delta$$

$$\begin{aligned} C &= \frac{F}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4k^2\omega^2} \cdot e^{i\delta}} \\ &= \frac{Fe^{-i\delta}}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4k^2\omega^2}} \end{aligned} \tag{7.64}$$

(7.61) と (7.64) より

$$\begin{aligned} z &= \frac{Fe^{i(\omega t-\delta)}}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4k^2\omega^2}} \\ &= \frac{F}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4k^2\omega^2}}\cos(\omega t-\delta)+\frac{iF}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4k^2\omega^2}}\sin(\omega t-\delta) \end{aligned} \tag{7.65}$$

$z$ の実部をとると

$$x(t)=\frac{F}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4k^2\omega^2}}\cos(\omega t-\delta) \tag{7.66}$$

が得られる．

(7.59) に対応する同次方程式の解は

$$\begin{aligned} x &= K_1e^{-kt}\cos\sqrt{\omega_0^2-k^2}t+K_2e^{-kt}\sin\sqrt{\omega_0^2-k^2}t \\ &= Ke^{-kt}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2-k^2}t+\alpha\right) \quad (K_1,K_2,K,\alpha\text{は任意定数}) \end{aligned} \tag{7.67}$$

よって一般解は

$$x(t)=Ke^{-kt}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2-k^2}t+\alpha\right)+\frac{F}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4k^2\omega^2}}\cos(\omega t-\delta) \tag{7.68}$$

となる．

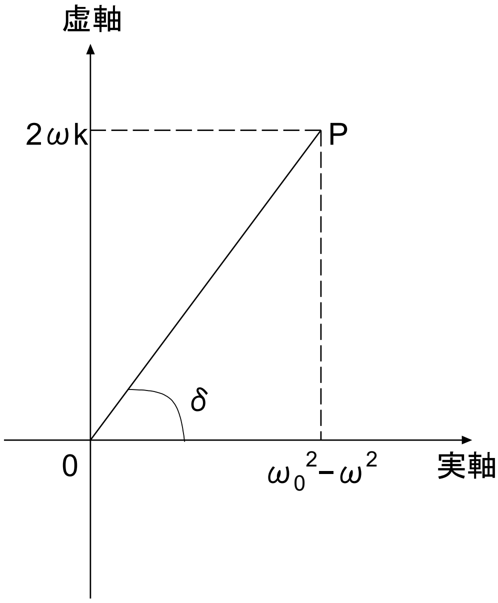


図 2: 複素数の性質を用いた解法：$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4k^2\omega^2}$

### 7.3　強制振動の場合のエネルギーと仕事の関係

前節で扱った強制振動の定常状態で，質点の力学的エネルギーの変化と抵抗力および外力のする仕事について論じる．次の運動方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+2mk\frac{dx}{dt}+m\omega_0^2x=F\cos\omega t$$

の両辺に $\frac{dx}{dt}$ をかけて変形し，積分すると (5.2 減衰振動のエネルギーを参照)

$$\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}m\omega_0x^2\right]_{t_1}-\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}m\omega_0x^2\right]_{t_0}$$

$$=\int_{x_0}^{x_1}\left(-2mk\frac{dx}{dt}\right)dx+\int_{x_0}^{x_1}F\cos\omega t \tag{7.69}$$

ここで，$x_0, x_1$ はそれぞれ時刻 $t_0, t_1$ における質点の力学的全エネルギーの変化を示し，右辺第 1 項はその間に抵抗のする仕事，第 2 項は外力のする仕事を表している．定常状態では運動は次式で表される．

$$x=A\cos(\omega t-\delta) \tag{7.70}$$

$$A=\frac{\frac{F}{m}}{\sqrt{({\omega_0}^2-{\omega_0}^2)^2+4k^2\omega^2}} \tag{7.71}$$

$$\delta=\tan^{-1}\frac{2k\omega}{{\omega_0}^2-\omega^2} \tag{7.72}$$

したがって

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}m{\omega_0}^2x^2 \\ &= \frac{1}{2}mA^2\omega^2+\frac{1}{4}mA^2({\omega_0}^2-\omega^2)\left\{1+\cos(2\omega t-2\delta)\right\} \end{aligned} \tag{7.73}$$

となり，強制振動の $\frac{1}{2}$ の周期で振動する．しかし，$E$ の 1 周期にわたっての平均値 $< E >$ は

$$\begin{aligned} < E > &= \frac{1}{T}\int_0^T E(t)dt \\ &= \frac{1}{2}\omega^2A+\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{2}m({\omega_0}^2-\omega^2)A^2\cos^2(\omega t-\delta)dt \\ &= \frac{1}{4}m({\omega_0}^2+\omega^2)A^2 \end{aligned} \tag{7.74}$$

となり，時間に無関係である．

次に，1 周期の間に抵抗のする仕事 $W_R$ は

$$\begin{aligned} W_R &= -2mk\int_0^T \left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)dt \\ &= -2mk\omega^2A^2\int_0^{2\pi/\omega}\sin^2(\omega t-\delta)dt \\ &= -2mk\omega tA^2 \end{aligned} \tag{7.75}$$

また外力のする仕事 $W$ は

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{2\pi/\omega} F\cos\omega t\frac{dx}{dt}dt \\ &= -\omega A\int_0^{2\pi/\omega} F\cos\omega t(\omega t-\delta)dt \\ &= \pi FA\sin\delta \end{aligned} \tag{7.76}$$

(7.70),(7.71) と図 2 より

$$\sin\delta = \frac{2k\omega}{\sqrt{({\omega_0}^2-\omega^2)^2+4k^2\omega^2}} \tag{7.77}$$

よって

$$\pi FA\sin\delta = \pi FA\frac{2k\omega}{\sqrt{({\omega_0}^2-\omega^2)^2+4k^2\omega^2}} \tag{7.78}$$

(7.71) と (7.76) より

$$\pi FA\sin\delta = 2mk\pi A^2 \tag{7.79}$$

単位時間に外力のする仕事，つまり外力の仕事率 $w$ は，単位時間に質点が受け取るエネルギーであるが，(7.76) より

$$w = \frac{\pi FA\sin\delta}{T} = \frac{\pi FA\sin\delta}{\frac{2\pi}{\omega}} \tag{7.80}$$

(7.71) と (7.77) より

$$\begin{aligned} w &= \frac{F^2}{m}\cdot\frac{k\omega^2}{({\omega_0}^2-\omega^2)^2+4k^2\omega^2} \\ &= \frac{F^2}{m{\omega_0}^2}\cdot\frac{\gamma\eta^2}{(1-\eta^2)^2+4\gamma^2\eta^2} \end{aligned} \tag{7.81}$$

ここで，$\eta=\frac{\omega}{\omega_0},\gamma=\frac{k}{\omega_0}$ である．$w$ は $\gamma$ とは無関係に，$\eta=1$ すなわち $\omega=\omega_0$ のとき最大であって

$$w_{\max} = \frac{F^2}{m\omega_0}\cdot\frac{1}{4\gamma} \tag{7.82}$$

である．外力の仕事率，すなわち振動子のエネルギー吸収が最大になるという意味で，この条件が成立する場合をエネルギー共振という．$\eta = 1$ 付近での様子を調べるために $\eta = 1 + u, u \ll 1$ とおくと (7.81) より

$$\begin{aligned} w &= \frac{F^2}{m\omega_0} \cdot \frac{\gamma}{\{1-(1+u)^2\}^2 + 4\gamma(1+u)^2} \\ &= \frac{F^2}{m\omega_0} \cdot \frac{\gamma}{(2u+u^2)^2 + 4\gamma^2(1+u)^2} \end{aligned} \tag{7.83}$$

となる．$u \ll 1$ であるから $2u + u^2 \fallingdotseq 2u, 1 + u \fallingdotseq 1$ と近似すると

$$w \fallingdotseq \frac{F^2}{m\omega_0} \cdot \frac{\gamma}{4u^2 + 4\gamma^2} = \frac{F^2}{m\omega_0} \cdot \frac{\gamma}{4(u^2+\gamma^2)} \tag{7.84}$$

となる．特に $w$ が $w_{\max}$ の半分になるのは (7.82) と (7.84) より

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\gamma} = \frac{\gamma}{4(u^2+\gamma^2)} \tag{7.85}$$

のとき，すなわち

$$u = \pm\gamma \tag{7.86}$$

のときである．$2\gamma$ を共振の半値幅，またその逆数 $\frac{1}{2\gamma}$ を $Q$ または $Q-$ 値 という．いずれも，共振の鋭さを示す量である．

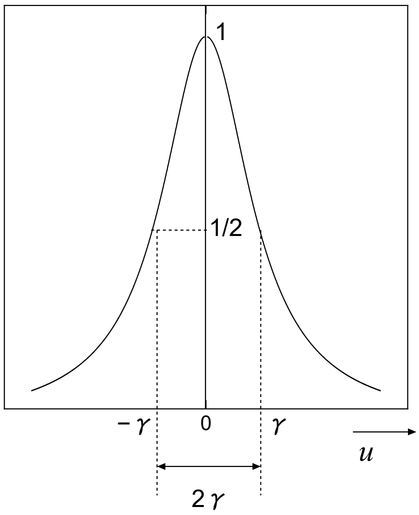


図 3: 半値幅

# 8　連成振動

## 8.1　保存力とポテンシャル

質点が A から B まで動く間に力 $\boldsymbol{F}$ がこれに対して行う仕事は

$$W_{AB} = \int_A^B \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_A^B (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \tag{8.1}$$

となる．力が

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = -mg \\ F_z = 0 \end{cases} \tag{8.2}$$

の一様な重力のとき

$$W_{\mathrm{AB}} = -mg\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} dy = -mg(y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}}) \tag{8.3}$$

となって，両端の $y$ 座標だけで値が決まり，途中の経路によらない．

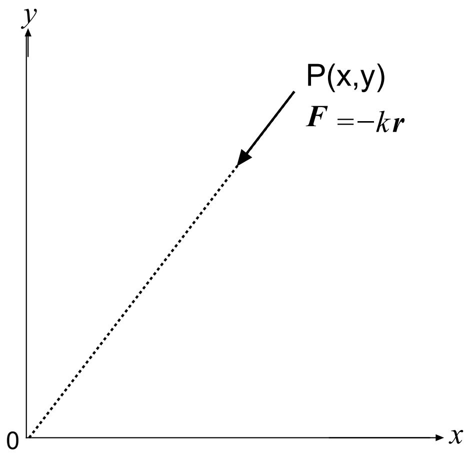


図 4: 原点からの距離に比例する大きさを有し原点に向かう引力の場合

力が原点からの距離に比例する大きさをもち，原点に向かう引力の場合を考える．そのような力 $\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{r}$ は成分で書くと

$$\begin{cases} F_x = -kx \\ F_y = -ky \\ F_z = -kz \end{cases} \tag{8.4}$$

この場合には

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{AB}} &= \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = -k\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}(xdx + ydy + zdz) \\ &= -k\left\{\int_{x_{\mathrm{A}}}^{x_{\mathrm{B}}} xdx + \int_{y_{\mathrm{A}}}^{y_{\mathrm{B}}} ydy + \int_{z_{\mathrm{A}}}^{z_{\mathrm{B}}} zdz\right\} \\ &= -\frac{1}{2}k({x_{\mathrm{B}}}^2 + {y_{\mathrm{B}}}^2 + {z_{\mathrm{B}}}^2) + \frac{1}{2}k({x_{\mathrm{A}}}^2 + {y_{\mathrm{A}}}^2 + {z_{\mathrm{A}}}^2) \end{aligned} \tag{8.5}$$

これも両端 A と B の位置だけで決まり，途中の道すじには関係しない．

以上のように，仕事が道すじによらず，両端の位置だけの関数として

$$W_{\mathrm{AB}} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = U(x_{\mathrm{A}}, y_{\mathrm{A}}, z_{\mathrm{A}}) - = U(x_{\mathrm{B}}, y_{\mathrm{B}}, z_{\mathrm{B}}) \tag{8.6}$$

のように表されるとき，この力を保存力といい，$U(x, y, z)$ をその力のポテンシャルという．

一様な重力では物を直接真上に持ち上げても，力を節約するために斜面をすべらせても，梃子を使っても，必要な仕事の量は同じである．このことは「仕事の原理」として知られている．そして，その仕事は，ポテンシャル

$$U = mgy \tag{8.7}$$

より得られる．原点からの距離に比例する引力 (8.4) ではポテンシャルは

$$U = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2) \tag{8.8}$$

(8.7) の $U$ では

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad -\frac{\partial U}{\partial y} = -mg, \quad -\frac{\partial U}{\partial z} = 0 \tag{8.9}$$

であり，(8.8) の $U$ では

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = -kx, \quad -\frac{\partial U}{\partial y} = -ky, \quad -\frac{\partial U}{\partial z} = -kz \tag{8.10}$$

となり，$F_x, F_y, F_z$ を与えている。(8.6) を満たす $\boldsymbol{F}$ は一般に

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \tag{8.11}$$

で与えられる．上式は

$$\boldsymbol{F} = -\frac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\boldsymbol{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\boldsymbol{k} \tag{8.12}$$

と書くことができる．ここで，$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ はそれぞれ $x, y, z$ 方向の単位ベクトルである．

$$\boldsymbol{F} = \mathrm{grad}\, U \text{ または } \mathrm{F} = -\nabla U \tag{8.13}$$

と書くのが一般的である．ベクトル解析で用いる記号 grad や $\nabla$ に関しては次節で詳述する．

## 8.2　ベクトル解析の基本

### 8.2.1　ベクトルとスカラー

座標平面上の点は $(x, y)$ のように $x$ 座標と $y$ 座標の組としてあらわすことができる．このようにいくつかの実数の組として表すことのできる量をベクトルという．これに対して，1 つの実数として表せる量をスカラーという．

### 8.2.2　ベクトル場とスカラー場

空間内の領域 $D$ 内の点 P にスカラーを対応させる関数 $f(\mathrm{P})$ 関数があるとき，$D$ を $f(\mathrm{P})$ で定まるスカラー場といい，ベクトルを対応させる関数 $\boldsymbol{F}(\mathrm{P})$ があるとき，$D$ を $\boldsymbol{F}(\mathrm{P})$ で定まるベクトル場という．たとえば，点 P における温度や気圧を対応させるとスカラー場が，空気や水の速度を対応させると，ベクトル場が得られる．

### 8.2.3　スカラー場の勾配

スカラー場 $f(x, y, z)$ に対し

$$\mathrm{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k} \tag{8.14}$$

を $f$ の勾配という．grad は勾配 (gradient) の略号で，グラディエントと読む．

### 8.2.4　ハミルトン演算子

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial z} \tag{8.15}$$

で定義された演算子をハミルトン演算子という．$\nabla$ はナブラと読む．これを用いるとスカラー場 $f(x, y, z)$ の勾配は

$$\nabla f = \mathrm{grad} f \tag{8.16}$$

と形式的に表すことができる．

## 8.3　保存力とポテンシャル

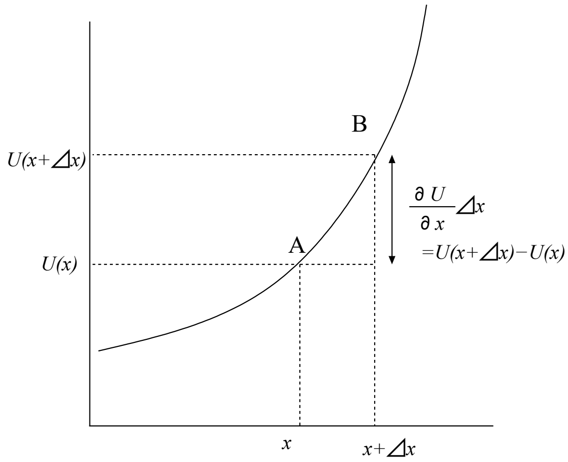


図 5: 保存力とポテンシャル

$$W_{\mathrm{AB}} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = U(x_A, y_A, z_A) - U((x_B, y_B, z_B) \tag{8.17}$$

を満たすような力 $\boldsymbol{F}$ は

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} \tag{8.18}$$

で与えられる．
(略証明)
A と B が極めて近く，$\overrightarrow{AB} = \Delta\boldsymbol{r}$ の 3 成分 $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ が微小量のときを考える．
このとき (1) の積分は

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F} \cdot \Delta\boldsymbol{r} = F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z \tag{8.19}$$

となる．一方，上式の最右辺は

$$U(x_A, y_A, z_A) - U(x_A + \Delta x, y_A + \Delta y, z_A + \Delta z) \tag{8.20}$$

と書ける．ただし，$\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$ は点 A での値を入れる．(8.19) と (8.20) を比較すると，$\Delta x, \Delta y, \Delta z$ は任意の値をとってよいので，これらがいつも一致するためには

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

## 8.4　連成振動

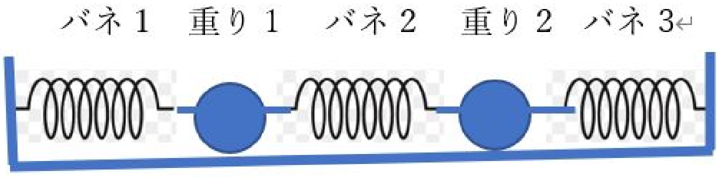


図 6: 連成振動

図6のような3本のバネでつないだ2個の重りがありバネの両端は自然長の状態で固定してある．床に摩擦は無く，重りは質点とみなすことができ，バネの質量は無視できるものとする．バネ1, 2, 3のバネ定数を $k_1, k_2, k_3$，重り1,2の質量を $m_1, m_2$ とする．重りの位置はつり合いの位置から測ることにし，それぞれ $x_1, x_2$ とする．

2個の粒子（重り）の運動方程式を求める．バネ1,2,3の”伸び”はそれぞれ $x_1, x_2, -x_1, -x_2$ である.（値が正のときはバネの伸び，値が負のときは縮みを表す.）各粒子に働く力はポテンシャルから導くことができる．この場合，ポテンシャルは3本のバネの弾性エネルギーとして求めることができて

$$U(x_1, x_2) = \frac{1}{2}k_1{x_1}^2 + \frac{1}{2}k_2(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}k_3{x_2}^2 \tag{8.21}$$

となる．2粒子に働く力は，それぞれ

$$\begin{cases} F_1 = -\dfrac{\partial U}{\partial x_1} = -k_1 - k_2(x_1 - x_2) \\ \\ F_2 = -\dfrac{\partial U}{\partial x_2} = -k_2(x_1 - x_2) - k_3 x_2 \end{cases} \tag{8.22}$$

と得られるから，運動方程式は

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x_1}{dt^2} = -k_1 - k_2(x_1 - x_2) \\ \\ m\dfrac{d^2x_2}{dt^2} = -k_2(x_1 - x_2) - k_3 x_2 \end{cases} \tag{8.23}$$

となる．2粒子は互いに影響しあいながら絡み合った運動をする．

2個の粒子は同じ質量をもち，バネ1,3が同じバネ定数 $k$ で，バネ2のバネ定数が $k'$ の場合を考える．$\frac{k}{m} = \kappa$, $\frac{k'}{m} = \kappa'$ とおくと，運動方程式は

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = -(\kappa + \kappa')x_1 + \kappa' x_2 \\ \\ \dfrac{d^2x_2}{dt^2} = -(\kappa + \kappa')x_2 + \kappa' x_1 \end{cases} \tag{8.24}$$

となる．(8.24) の 2 式の和をとれば

$$\frac{d^2(x_1+x_2)}{dt^2} = -\kappa(x_1+x_2) \tag{8.25}$$

(8.24) の 2 式の差をとれば

$$\frac{d^2(x_1-x_2)}{dt^2} = -(\kappa+2\kappa')(x_1-x_2) \tag{8.26}$$

ここで，

$$y = x_1 + x_2, \quad z = x_1 - x_2 \tag{8.27}$$

という量を導入すると，(8.25) と (8.26) より

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dt^2} = -\kappa y \\ \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = -(\kappa+2\kappa')z \end{cases} \tag{8.28}$$

となる．この運動方程式は $y, z$ という量が独立に単振動することを示している．固有角周波数（固有角振動数）は

$$\begin{cases} y\,\text{の固有角周波数} \quad \omega_y = \sqrt{\kappa} \\ \\ z\,\text{の固有角周波数} \quad \omega_z = \sqrt{\kappa+2\kappa'} \end{cases} \tag{8.29}$$

となる．

# 9　結言

本稿では，主に線形な一自由度の運動方程式で表される振動を扱った．線形な運動方程式では，複雑な実現象を扱うことは困難である．

しかし，線形な理論を知らずして，非線形な理論を習得することはできない．振動の振幅が十分小さいならば，線形近似を用いる場合がある．単振り子や船の横揺れの固有周期と呼ばれているものは，線形近似した運動方程式から求められている．最も簡単な非線形運動方程式の例として次式が挙げられる．

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mk_1x - mk_3x^3, \quad m>0, k_1>0 \tag{9.1}$$

$k_3 > 0$ の場合は硬化バネ型と呼ばれ，振幅が大きくなると，周期は短くなる．$k_3 < 0$ の場合は軟化バネ型と呼ばれ，振幅が大きくなると，周期は長くなる．

運動方程式が非線形な場合に関して分かりやすく書かれたものに上村・坪井 [6] がある．線形近似の限界と問題点に関しては拙著 [27] を参照して頂きたい．

# 参考文献


[1] 有山正孝，振動・波動，裳華房，1986.

[2] 原　惟行・松永秀章，常微分方程式入門　第 3 版，共立出版，2018.

[3] 長谷川修司，振動・波動，講談社，2009.

[4] 樋口禎一・八高隆雄，フーリエ級数とラプラス変換の基礎・基本，牧野書店，2000.

[5] 石村園子，やさしく学べる微分方程式，共立出版，2003.

[6] 上村　豊・坪井賢二，数学入門　. 基礎編（第 2 版）, 東京化学同人，2019.

[7] 金子　晃，微分方程式講義，サイエンス社，2014.

[8] 木村俊房，常微分方程式の解法　(新数学シリーズ)，培風館，1958.

[9] 小出昭一郎，物理学　三訂第 57 版，裳華房，2008.

[10] 小寺平治，テキスト 微分方程式，共立出版，2006.

[11] Erwin Kreyszig (原著) · 近藤次郎 (翻訳) · 北原和夫 (翻訳) · 堀 素夫 (翻訳)，常微分方程式 (技術者のための高等数学) 第 8 版，培風館，2006.

[12] 松平 升・大槻義彦・和田正信，理工教養　物理学，培風館，1975.

[13] 松下 貢，物理数学，裳華房，2007（第 8 版）.

[14] 三井斌友・小藤俊幸，常微分方程式の解法 (工系数学講座 9)，共立出版，2000.

[15] 水田義弘，大学で学ぶやさしい微分方程式，サイエンス社，2008.

[16] 長岡洋介，振動と波，裳華房，1992.

[17] 渋谷仙吉・内田伏一，常微分方程式 (物理数学コース) 第 10 版 5 刷，裳華房，2014.

[18] 真貝寿明，徹底攻略　常微分方程式，共立出版，2010.

[19] 高野恭一，常微分方程式 新数学講座 (6)，朝倉書店，1994.

[20] 田辺行人・藤原毅夫，常微分方程式，東京大学出版会，1981.

[21] 田代嘉宏，ラプラス変換とフーリエ解析要論　第 2 版，森北出版，2004.

[22] 寺田文行　他，演習微分方程式 新版　(新版演習数学ライブラリ)，サイエンス社，2010.

[23] 寺田文行　他，演習と応用 微分方程式　(新・演習数学ライブラリ)，サイエンス社，2000.

[24] 外岡慶之助・井手三郎・山口正栄・中田　平・中島甲臣・秋山隆二郎，積分学コンパニオン，学術図書出版社，1967.

[25] K.UENO, N.KIMURA, and K.AMAGAI
Estimation of Coefficient of the Equation of Nonlinear Roll Motion for Fishing Boats by Improved Energy Method and Genetic Algorithm
*Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics* , Vol.**20** , pp.155-192, 2003.

[26] 上野公彦
第一種完全楕円積分を用いた非線形船体横揺れ運動方程式のパラメータ推定入門, 数理水産科学, 第 4 巻 , pp.130-161, 2006.

[27] K.UENO and Y.HIDA
Characteristics of Frequency Response Function Obtained from Equation of Ship Roll Motion Including Nonlinear Restoration Term, Fisheries Engineering,Vol.55,No.3,pp.187-192, 2019.

[28] 矢嶋信男，常微分方程式 (理工系の数学入門コース 4)，岩波書店，1989.

[29] 柳田英二・栄 伸一郎，講座 数学の考え方〈7〉常微分方程式論，朝倉書店，2002.

[30] 吉田耕作，微分方程式の解法　第 2 版，岩波書店，1978.

# 著者略歴

**上野 公彦 (Kimihiko UENO)**

1992 年　北海道大学水産学部漁業学科卒業
1994 年　北海道大学大学院水産学研究科博士前期課程修了
1996 年　北海道大学大学院水産学研究科博士後期課程中途退学
1996 年　東京水産大学海洋生産学科助手
1997 年　博士（水産学：北海道大学）
2003 年　東京海洋大学海洋科学部海洋環境学科助教授
2007 年　東京海洋大学海洋科学部海洋環境学科准教授
2016 年　東京海洋大学学術研究院海洋環境学部門准教授
2017 年　東京海洋大学学術研究院海洋資源エネルギー学部門准教授
現在に至る
研究対象：浮体の動揺運動方程式のパラメータ同定,
複雑系の観点からみた不規則波中における漁船の動揺解析,
船体動揺への自由水の影響に関する研究
所属学会：数理水産科学会，日本応用数理学会, システム制御情報学会,
電子情報通信学会，日本自然災害学会，数学教育学会，日本航海学会,
日本水産工学会